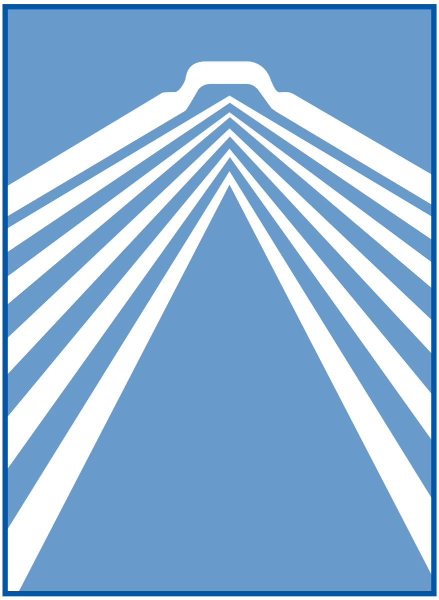
2.ª edición

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES



Francisco José Freniche Ibáñez
José Antonio Facenda Aguirre

PIRÁMIDE

2.ª edición

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

FRANCISCO JOSÉ FRENICHE IBÁÑEZ
CATEDRÁTICO DEL DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA
JOSÉ ANTONIO FACENDA AGUIRRE
PROFESOR TITULAR DEL DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA

2.ª edición

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

EDICIONES PIRÁMIDE

COLECCIÓN «CIENCIA Y TÉCNICA»

Edición en versión digital

Composición y maquetación: Autores
Dirección electrónica de los autores:
freniche@us.es
facenda@us.es

© Primera edición electrónica publicada por Ediciones Pirámide (Grupo Anaya, S. A.), 2022
Para cualquier información pueden dirigirse a piramide_legal@anaya.es
Juan Ignacio Luca de Tena, 15. 28027 Madrid
Teléfono: 91 393 89 89
www.edicionespiramide.es
ISBN digital: 978-84-368-4652-2

A David, Alberto y Ana María.

A Rosalía, Cristina, Marta,
Manuel y Francisquito.

Índice general

Índice de figuras

Prólogo

Este libro va dirigido a estudiantes de la licenciatura en Matemáticas que vayan a tener su primer contacto con el cálculo integral de funciones de varias variables reales, lo cual ocurre, en la mayoría de los casos, en el segundo curso de carrera. Se trata de una materia fundamental en la formación matemática, básica no solo en las facultades de matemáticas, sino también en las de ciencias y en las escuelas técnicas.

Hemos optado por utilizar la integral de Lebesgue, que acaba de cumplir un siglo de vida. Esta integral tiene las ventajas de conjugar facilidad de manejo y mayor alcance, además de ser imprescindible en muchas otras materias, como la teoría de la probabilidad, el análisis de Fourier, las ecuaciones diferenciales y funcionales, etc. Presenta, por el contrario, el inconveniente, frente a otras integrales como la de Riemann, del mayor tiempo necesario para su construcción. Conscientes de que la integración es una parte del análisis matemático que necesita de considerable esfuerzo para su comprensión, nos hemos esforzado en motivar tanto las demostraciones como los conceptos que se introducen, reelaborando muchas de las pruebas y distribuyendo los temas de forma que resulten más cómodos de estudiar. Creemos que se ha encontrado un desarrollo acorde a los conocimientos y, más importante aún, en nuestra opinión, a la madurez de los alumnos a los que va dirigido el libro.

Así, en el primer capítulo se construye la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, presentándola como una extensión natural de la longitud en la recta, del área en el plano o del volumen en el espacio de tres dimensiones: se parte de figuras cuya medida es conocida (intervalos o rectángulos) y se amplía la clase de estas figuras, primero a conjuntos abiertos (que se expresan como unión disjunta de intervalos) y, después a conjuntos medibles. Estos se definen como aquellos conjuntos que pueden aproximarse interior y exteriormente por conjuntos cerrados y abiertos, respectivamente, definición que hace inmediato el teorema de estructura. Merece destacarse la prueba que se da del algunas veces llamado "lema de los rectángulos", esencial para obtener la aditividad de la medida de Lebesgue, que hemos basado en la observación de que la medida de un intervalo de extremos con coordenadas enteras coincide con el número de puntos de coordenadas enteras que contiene.

Hemos evitado el abstracto teorema de Carathéodory de construcción de medidas a partir de medidas exteriores, el cual hallará su lugar, sin duda, en un curso de teoría de la medida o de probabilidades, no orientado como aquí al cálculo de integrales de funciones de varias variables. El capítulo primero termina asegurando al alumno que la medida que se ha construido tiene las propiedades razonables requeridas: se demuestra la invariancia de la medida respecto de movimientos rígidos[1]; dicho de otra manera, se prueba que la medida de una figura no depende de la posición en la que se encuentra, lo cual permite comprobar fácilmente que la medida de conjuntos elementales, como los polígonos, es la que se conoce de la geometría básica.

En el capítulo segundo se ha preferido no dar la prueba del teorema de la convergencia dominada basada en el lema de Fatou, rápida pero con el inconveniente de que el alumno comprueba que todos los pasos están bien pero no llega a entenderla, escogiendo la que se basa en el teorema de Egoroff, que relaciona la convergencia puntual y la uniforme; es esta demostración más larga pero mucho más motivada: progresivamente se demuestra el teorema para sucesiones uniformemente convergentes y para uniformemente acotadas, y finalmente para el caso general de una sucesión dominada.

En este capítulo se define la integral de funciones medibles en un espacio de medida abstracto, no necesariamente el de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ —esperamos que de esta forma, en el último capítulo, se llegue a comprender mejor cómo se integran funciones definidas en curvas y en superficies respecto de las medidas longitud de arco y elemento de superficie—. Se demuestran los teoremas de convergencia, el de la convergencia monótona y el ya mencionado de la convergencia dominada. Estos resultados proporcionan condiciones

[1] Frecuentemente este hecho se retrasa, para darlo como consecuencia del teorema del cambio de variables.

suficientes muy sencillas de comprobar para el intercambio de límites con integrales, una de las facetas en las que la integral de Lebesgue muestra más claramente su ventaja sobre otras integrales.

El tercer capítulo está dedicado a la integral de funciones de una variable respecto de la medida de Lebesgue en la recta. En él se rescata la prueba original de Lebesgue, que se encuentra en su tesis doctoral del año 1902, en la que se demuestra la regla de Barrow para funciones integrables y acotadas en un intervalo acotado (a, b) de la recta[2]. Esto permite que el cálculo práctico de integrales de Lebesgue no requiera el conocimiento previo de otras integrales, como la de Riemann, que es lo habitual. También se explica en este capítulo tercero el manejo de integrales extendidas a intervalos no acotados, enseñando cómo reconocer si una función es integrable o no, sin presuponer que se conocen las integrales impropias de Riemann.

El cálculo con integrales dependientes de parámetros, de su derivada en particular, es central en este capítulo; se explica con detalle en algunos ejemplos cómo las acotaciones tienen, a veces, que ser de tipo local. Se dan algunas aplicaciones interesantes de las integrales paramétricas: la prueba de Hilbert del hecho de que el número e es trascendente, basada en la función gamma de Euler, y la prueba de la fórmula de Stirling que da el comportamiento asintótico del factorial. Se termina con un estudio comparativo de las integrales de Riemann y Lebesgue, que constituye, en el desarrollo escogido, un buen ejercicio acerca de las definiciones de integral y la utilización de los teoremas de convergencia.

El cálculo de integrales múltiples, es decir, de integrales de funciones de varias variables, se presenta en el capítulo cuarto. En él se encuentra el teorema de Fubini, que permite calcular, o expresar, una integral múltiple como varias integrales de funciones de una única variable. Para ser aplicado en la práctica, se necesita que el recinto de integración sea un conjunto proyectable —en el plano, es un conjunto limitado por dos segmentos verticales y dos curvas, una inferior y otra superior—; cuando esto no es así, normalmente un cambio de variables adecuado convierte el recinto en otro proyectable, en el que se puede hacer ya la integración reiterada. Es el teorema del cambio de variables, también estudiado en este capítulo, el que relaciona la integral de la función en el recinto inicial con la de la función cambiada de variables en el nuevo recinto.

[2]Naturalmente, no entramos a discutir en toda su extensión el problema de la derivación de integrales indefinidas de Lebesgue.

El teorema de Fubini se presenta de una manera geométrica, basada en el principio de Cavalieri, ya conocido por Arquímedes, que dice, en el caso del plano, que el área de una figura es la suma (integral) de las longitudes de todas sus secciones paralelas a una recta dada; los alumnos comprenden bien este hecho, pues se utiliza habitualmente en cursos previos para definir el área de una figura plana. En el teorema del cambio de variables se procede del siguiente modo: en primer lugar se considera el problema de calcular la medida de la imagen de una región mediante una transformación lineal, y después, por aproximación lineal de tipo local, para una transformación diferenciable. Se obtiene que la razón local entre las medidas es precisamente el valor absoluto del determinante jacobiano de la transformación, lo que conduce rápidamente a la fórmula del cambio de variables.

Se incluyen ejercicios completamente resueltos de cálculo de algunas integrales usando los cambios de variables a coordenadas polares, esféricas y cilíndricas, en los que se muestra con detalle cómo se calculan las proyecciones, las secciones, los conjuntos transformados, etc.

El último capítulo está dedicado a las integrales de línea y de superficie. El esquema seguido es el siguiente: para definir las integrales de funciones definidas en curvas y en superficies, primero hay que dotar a estas de medidas convenientes, la longitud de arco en el primer caso, y el elemento de área en el segundo. En el caso de las curvas, la longitud puede definirse de manera natural como supremo de longitudes de poligonales inscritas en ellas, mientras que en el caso de las superficies no puede procederse así (véase el ejemplo de Schwarz). En ambos, es el conocimiento de una parametrización lo que permite definir la medida adecuada y calcular con ella. Se ha hecho un esfuerzo considerable para poder incluir entre las superficies en las que se puede definir el elemento de área, las que aparecen en la práctica, que son unión de varios trozos de superficies regulares, y para demostrar que la medida en la curva o en la superficie no depende de la parametrización[3]. La integración de funciones, escalares y vectoriales —estas considerando su componente tangencial o su componente normal—, definidas en curvas y en superficies, queda automáticamente definida, y la validez de sus propiedades se tiene como consecuencia de lo estudiado en el capítulo segundo.

En este capítulo final se estudian los teoremas de Green, Stokes y Gauss, que pueden considerarse como versiones en dimensiones superiores de la

[3] En primera lectura sería conveniente limitar la independencia de la parametrización a las superficies regulares.

regla de Barrow. Se debe destacar que el teorema de Green se demuestra para regiones proyectables únicamente sobre algún eje, y no, como es lo habitual, solo para proyectables sobre los dos ejes[4]. La demostración, que hemos elaborado a partir del libro de Widder citado en la bibliografía, utiliza el teorema de Fubini y la derivación de integrales paramétricas en las que los límites de integración dependen también del parámetro. Hemos demostrado el teorema de Gauss *completamente* para sólidos que son proyectables sobre un plano de modo que la proyección es a su vez proyectable sobre una recta, mientras que lo que se encuentra en libros de este nivel es la prueba[5] de este teorema para sólidos proyectables simultáneamente sobre los tres ejes.

Es este un "libro de teoría", en el que se exponen los resultados y sus demostraciones. Parte esencial del aprendizaje de las matemáticas en general, y del análisis matemático en particular, es la resolución de ejercicios. Es por ello que al final de cada capítulo se ha incluido una lista de problemas propuestos. Si bien son, en su mayor parte, prácticas de cálculo integral, ya sea de integrales paramétricas, ya de integrales múltiples, de volúmenes y áreas, de longitudes y de superficies, etc., también se encuentran algunos que tienen el propósito de clarificar los conceptos teóricos correspondientes, que son pruebas de resultados auxiliares sencillos, o que son demostraciones alternativas a las dadas. En el propio texto se hallan completamente resueltos algunos ejercicios "tipo", como los ya mencionados anteriormente acerca de cálculo de volúmenes, que deberían ser cuidadosamente estudiados antes de abordar los propuestos.

Los conocimientos previos que se necesitan para abordar con éxito el estudio de este libro son, principalmente, el conocimiento del cálculo diferencial de funciones de una y varias variables reales —la diferencial de una función, la matriz jacobiana de las derivadas parciales—; el cálculo de algunas primitivas; la convergencia de series y el límite de sucesiones —tanto numéricas como de funciones—; nociones topológicas en espacios métricos, del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ en realidad, como compacidad, conexión, continuidad, etc.; conocimientos de álgebra lineal que abarquen las aplicaciones li-

[4]Esta diferencia es sustancial, pues puede probarse que toda región plana limitada por una curva de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos es unión de recintos proyectables sobre alguna recta, mientras que no es cierto si se exige que sean proyectables sobre dos.

[5]Hemos de señalar que, además, lo que suele hacerse es probar una de las tres igualdades en las que se traduce el teorema de Gauss y decir que las otras dos se hacen igual, siendo esto claramente insatisfactorio si no se ha demostrado previamente que se puede utilizar para el cálculo cualquier parametrización.

neales, matrices y determinantes; y, para el último capítulo, elementos de cálculo vectorial. Resultados de cálculo diferencial que posiblemente no son conocidos por los alumnos, acerca de funciones con rango máximo, utilizados en el último capítulo para probar que las integrales de línea y de superficie son independientes de la parametrización, y el teorema de incrementos finitos para las normas del supremo, usado en la demostración del teorema del cambio de variables en el cuarto capítulo, se han incluido en un apéndice.

Aparecen distribuidas a lo largo del libro unas pequeñas reseñas biográficas de algunos matemáticos que han contribuido de forma relevante en la materia. Las fuentes de las que proceden están detalladas en la bibliografía. Aquellos lectores interesados en profundizar en el desarrollo histórico de esta parte de la matemática tienen en el libro *Lebesgue's theory of integration*, de T. Hawkins, un excelente punto de partida.

Estas breves notas van acompañadas de una ilustración, ya sea foto o grabado. Queremos mencionar que la foto de H. L. Lebesgue es la que aparece en el primer volumen de sus obras completas, con permiso de la editorial L'Enseignement Mathemàtique; la foto del molino de G. Green nos ha sido proporcionada por Denny Plowman, de Nottingham City Museums, y la de B. Levi por Enrique P. Cattaneo, de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad de Rosario (Argentina). Las fotos de G. Fubini y L. Tonelli has sido tomadas también de sus obras completas. El resto procede del archivo MacTutor de Historia de las Matemáticas, de la Universidad de St. Andrews (Escocia), que puede consultarse en la dirección electrónica *http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history*.

Incluimos al final del libro unas referencias bibliográficas que abarcan la materia tratada en el mismo, así como un índice alfabético en el que reflejamos la página donde aparece por primera vez cada término.

El libro se ha elaborado con el procesador de textos TEX, creado por Donald E. Knuth. Se ha utilizado LATEX 2$_\varepsilon$ y una serie de paquetes adicionales. Contiene además un total de 49 figuras. Se han construido utilizando los programas *Mathematica* y *CorelDRAW*, junto con el paquete *psfrag*.

Queremos agradecer al departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Sevilla las facilidades que nos ha proporcionado para elaborar el libro. Asimismo, al Grupo Anaya el interés mostrado hacia nuestro proyecto, plasmado con la publicación en esta colección de Ediciones Pirámide.

Los autores, Sevilla, enero de 2002

TÍTULOS PUBLICADOS

ÁLGEBRA LINEAL, *R. E. Larson, B. H. Edwards, D. C. Falvo, L. Abellanas Rapún.*
ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA, *P. Alberca Bjerregaard y D. Martín Barquero.*
ANÁLISIS DE DATOS EN LAS CIENCIAS DE LA ACTIVIDAD FÍSICA Y DEL DEPORTE, *M.ª I. Barriopedro y C. Muniesa.*
CÁLCULO, *P. Alberca Bjerregaard y D. Martín Barquero.*
CURSO DE GENÉTICA MOLECULAR E INGENIERÍA GENÉTICA, *M. Izquierdo Rojo*
ECOLOGÍA, *J. Rodríguez.*
ECUACIONES DIFERENCIALES II, *C. Fernández Pérez y J. M. Vegas Montaner.*
ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES, *M. Solaguren-Beascoa Fernández.*
ENZIMOLOGÍA, *I. Núñez de Castro.*
FÍSICA CUÁNTICA, *C. Sánchez del Río (coord.).*
FISIOLOGÍA VEGETAL, J. *Barceló Coll, G. Nicolás Rodrigo, B. Sabater García y R. Sánchez Tamés.*
FLEXIBILIDAD. Nuevas metodologías para el entrenamiento de la flexibilidad, *E. H. M. Dantas, M. C. de S. C. Conceição y A. Alías (coords.).*
INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES, *F. J. Freniche Ibáñez y J. A. Facenda Aguirre.*
INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA Y SUS APLICACIONES, *R. Cao Abad, M. Francisco Fernández, S. Naya Fernández, M. A. Presedo Quindimil, M. Vázquez Brage, J. A. Vilar Fernández, J. M. Vilar Fernández.*
MATEMÁTICAS BÁSICAS PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD, *Á. M. Ramos del Olmo y J. M.ª Rey Cabezas*
MÉTODOS NUMÉRICOS. Teoría, problemas y prácticas con MATLAB, *J. A. Infante del Río y J. M.ª Cabezas.*
PROBLEMAS, CONCEPTOS Y MÉTODOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO. 1. Números reales, sucesiones y series, *M. de Guzmán y B. Rubio.*
PROBLEMAS, CONCEPTOS Y MÉTODOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO. 2. Funciones, integrales, derivadas, *M. de Guzmán y B. Rubio.*
PROBLEMAS DE GENÉTICA RESUELTOS, Desde Mendel hasta la genética cuantitativa, *M. D. Llobat.*
SERIES DE FOURIER Y APLICACIONES. Un tratado elemental, con notas históricas y ejercicios resueltos, *A. Cañada Villar.*
TABLAS DE COMPOSICIÓN DE ALIMENTOS, *O. Moreiras, A. Carbajal, L. Cabrera y C. Cuadrado.*
TECNOLOGÍA MECÁNICA Y METROTECNIA, *P. Coca Rebollero y J. Rosique Jiménez.*
TERMODINÁMICA Y CINÉTICA QUÍMICA PARA CIENCIAS DE LA VIDA Y DEL MEDIOAMBIENTE. 100 problemas resueltos, *J. A. Anta, S. Calero y A. Cuetos.*