ECUACIONES DIFERENCIALES

EN DIFERENCIAS Y EN DERIVADAS PARCIALES

Mihaela Negreanu
Antonio Manuel Vargas

PIRÁMIDE

ECUACIONES DIFERENCIALES

EN DIFERENCIAS Y EN DERIVADAS PARCIALES

Composición realizada con LaTeX

MIHAELA NEGREANU
PROFESORA CATEDRÁTICA EN EL DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA
DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

ANTONIO MANUEL VARGAS
POSDOCTORAL JUAN DE LA CIERVA

ECUACIONES DIFERENCIALES

EN DIFERENCIAS Y EN DERIVADAS PARCIALES

EDICIONES PIRÁMIDE

COLECCIÓN «CIENCIA Y TÉCNICA»

Edición en versión digital

Para cualquier información pueden dirigirse a piramide_legal@anaya.es
Juan Ignacio Luca de Tena, 15. 28027 Madrid
Teléfono: 91 393 89 89
www.edicionespiramide.es
ISBN digital: 978-84-368-4763-5

A nuestras familias.

Índice general

Prólogo

Este libro va dirigido a los alumnos de las diferentes asignaturas de Grado y Máster relativas a las Ecuaciones Diferenciales, en Diferencias y en Derivadas Parciales, y tiene por objeto dar a conocer la teoría y métodos, cualitativos y cuantitativos, básicos de estos complejos campos.

El libro es autocontenido, de forma que el lector encontrará en él todas las herramientas necesarias para abordar con éxito el estudio de estas asignaturas. Por ello, hemos intentado exponer en el texto los contenidos completos y de forma sistemática necesarios con un nivel intermedio. Así, algunos lectores −aquellos que se acerquen a las ecuaciones en diferencias, diferenciales y en derivadas parciales para aplicarlas en disciplinas como la Física, la Biología o las Ciencias Sociales− encontrarán resultados y demostraciones que vayan más allá de sus necesidades, y podrán obviar estos contenidos. Por el contrario, hemos pretendido plasmar únicamente los resultados y demostraciones que contribuyan a mejorar la comprensión del conjunto, lo que conlleva no hacer hincapié en los contenidos que puedan resultar muy teóricos o avanzados; el lector que lo desee puede utilizar este texto como base y ampliar sus conocimientos con la bibliografía que proponemos al final del mismo.

El texto comienza con un capítulo, **Preliminares y notación**, en el que fijamos los conceptos previos y la nomenclatura que, si bien no son estrictamente necesarios para comprender la mayor parte de los resultados, es muy conveniente tener en cuenta a la hora de llevar a cabo un estudio con provecho del resto de capítulos.

El resto del libro se divide en dos partes diferenciadas aunque relacionadas: la primera parte, capítulos 2-5, aborda el estudio de las ecuaciones en diferencias; la segunda parte, los capítulos 6-7, trata las ecuaciones diferenciales y los capítulos 8-9 presentan conceptos de ecuaciones en derivadas parciales, centrándose en las ecuaciones de calor y ondas. Se trata de una división que permite el estudio separado de estos grandes bloques, de modo que el lector que lo desee puede utilizar únicamente uno de ellos, sin necesitar recurrir al otro. Sin embargo, los autores debemos poner de manifiesto que la mejor manera de comprender en profundidad el contenido del libro es enfrentarse al texto íntegro, reflexionando acerca de las diferencias y similitudes de los bloques.

La estructura de los capítulos siguientes es similar. En primer lugar, exponemos la teoría, las definiciones, resultados y demostraciones necesarias. Por medio de ejemplos mostramos métodos y herramientas que ayudan a profundizar en los contenidos anteriores y cómo aplicarlos. Por último, en la sección final de cada capítulo, proponemos una colección extensa y variada de ejercicios y problemas para que el lector practique lo aprendido y sea consciente del grado de comprensión que ha adquirido. El número de ejemplos, ejercicios y problemas propuestos debe ser suficiente para la consolidación, profundización y ampliación de la teoría.

El capítulo 2 está dedicado a las **Ecuaciones en diferencias**, que introducimos por medio de las de primer orden y las autónomas. Desarrollamos también una presentación de la teoría de bifurcación para este tipo de ecuaciones. Al igual que haremos en el resto de capítulos, propondremos varios ejemplos en los que exponemos cómo aplicar toda la teoría, métodos y procedimientos que han sido presentados. En la última sección recogemos una buena colección de ejercicios y problemas que ayudarán al lector a comprobar que ha entendido el contenido del capítulo.

Estudiamos las **Ecuaciones en diferencias lineales de orden 2** en el tercer capítulo, comenzando con las ecuaciones homogéneas, con coeficientes constantes, y finalizando con las ecuaciones completas. Del mismo modo, presentamos varios ejemplos y ejercicios para profundizar en los contenidos del capítulo.

Dedicamos el capítulo 4, **Sistemas de ecuaciones en diferencias**, a estudiar los casos lineal, homogéneo y completo, y el método de la variación de las constantes, así como recordamos la forma canónica de Jordan. A través del estudio de los autovalores de la matriz del sistema, abordamos en el capítulo 5, **Trayectorias. Diagramas de fases u órbitas**, la clasificación de las trayectorias de los sistemas y la linealización de los no lineales. Se proponen ejemplos, ejercicios y problemas con el fin de que el lector consolide y amplíe su compresión de la teoría.

El segundo bloque comienza con el capítulo 6, **Ecuaciones diferenciales**, con el que introducimos los fundamentos de la teoría y estudiamos las ecuaciones autónomas de orden 1 junto con las bifurcaciones. En el capítulo 7, **Sistemas de ecuaciones diferenciales**, ampliamos el anterior estudio a los sistemas lineales y no lineales. Presentamos también los sistemas con integrales y los conservativos. Proponemos ejemplos, varios de ellos tomados de la Física, y problemas que completan la exposición del capítulo.

El capítulo 8, **Ecuación del calor**, contiene un amplio estudio de esta ecuación en derivadas parciales en sus diferentes versiones. Tratamos el problema de Cauchy, el método de la energía, los principios del máximo y de comparación y las series de Fourier. Finalmente, dedicamos el capítulo 9, **Ecuación de ondas**, al tratamiento de la ecuación en derivadas parciales hiperbólica con sus condiciones de contorno e iniciales. Implementamos, a su vez, el método de la energía, el problema de Cauchy y la fórmula de D'Alambert. El capítulo termina con una colección de ejercicios y problemas que ayudan a completar el estudio de la teoría presentada.

Queremos manifestar nuestro agradecimiento a algunos de quienes, directa o indirectamente, contribuyeron al resultado del libro, ya que sería imposible mencionarlos a todos. Agradecemos a nuestros compañeros, los profesores Sixto Álvarez Rodríguez y Raúl Ferreira de Pablo, expertos en el campo de las ecuaciones diferenciales, por las innumerables discusiones sobre todos los temas del libro y a cualquier hora del día, por proporcionarnos material, ejemplos, problemas e información para el libro. Nos hicieron tomar conciencia de lo importante que es exponer claramente las ideas.

Madrid, 19 de diciembre de 2022.
Los autores.

1 Preliminares y notación

Definición 1.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Decimos que f es lipschitziana si existe una constante K de modo que:*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 1.2 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Decimos que f es localmente lipschitziana si para todo punto existe un entorno en el que la función es lipschitziana.*

Definición 1.3 *Una función es contractiva si es lipschitziana de constante $K = 1$.*

Teorema 1.1 *(Picard) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ lipschitziana. Entonces, $\forall t_0 \in [a, b]$, existe una única función $x \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tal que $x'(t) = f(x(t))$ y $x(t_0) = x_0$.*

Teorema 1.2 (Teorema de la Función Implícita) *Si $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (S abierto) y sea $(x_0, y_0) \in S$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. Entonces existe un intervalo I, $x_0 \in I$ y una función $g(x)$ y solo una, $g : I \to \mathbb{R}$ tal que:*

1. *$g(x) \in \mathcal{C}^1(I)$.*
2. *$g(x_0) = y_0$.*
3. *$f(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in I$.*

1.1. Series de Fourier

Presentamos una serie de definiciones y resultados que son necesarios para introducir y entender en profundidad la serie de Fourier de una función. Sin embargo, el **capítulo 8** contiene una explicación suficiente para poder desarrollar los métodos necesarios para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

Definición 1.4 *(Series de Fourier) Dada $f(x)$ definida en $[-L, L]$ definimos su serie de Fourier:*

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right],$$

donde los coeficientes se definen como

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \qquad a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx,$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx.$$

Evidentemente, para que esté bien definida, las integrales y los sumatorios tienen que estar bien definidos.

Definición 1.5 *Dadas dos funciones f, g continuas en $[-L, L]$, se define el producto escalar*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx.$$

Definición 1.6 *Una base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ es aquella en la que se cumple*

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0 \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}, \quad i \neq j,$$

$$\langle e_i, e_i\rangle = \|e_i\| = 1 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Teorema 1.3 *La familia de funciones* $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}$ *es ortonormal.*

Teorema 1.4 *Sea una base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de un espacio vectorial V, entonces para todo vector $v \in V$ se tiene $\langle v, e_i\rangle = v_i$, es decir,*

$$v = v_1e_1 + ... + v_ne_n = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i.$$

Con estas herramientas, sabemos que en el espacio vectorial de funciones continuas sobre $\mathbb{R}$, esto es $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, existe una base ortonormal

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\ \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) : \forall n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Para comprobarlo, se utilizan las definiciones de la base ortonormal y del producto escalar, junto con las propiedades básicas de las funciones trigonométricas.

Fórmulas trigonométricas. Vamos a recordar algunas fórmulas trigonométricas muy útiles en el desarrollo de las series de Fourier. Para cualquier función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\rangle\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\rangle\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

¿Cuándo $\int\sum = \sum\int$*?*

¿Cuándo la integral de un sumatorio coincide con el sumatorio de las integrales? Es una de las preguntas básicas cuando se trabaja con funciones cuya expresión explícita está dada en forma de series finitas o/e infinitas. A primera vista parece que los dos cuantificadores conmutan, pero esto no siempre es así.
Primero definimos un concepto fundamental para abordar esta cuestión:

Definición 1.7 *(Convergencia puntual) Sea* $S \subset \mathbb{R}$ *un conjunto,* $(f_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones de* S *en* $\mathbb{R}$ *y* $f : S \to \mathbb{R}$*. Decimos que la sucesión* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge puntualmente a* f *en* S *si fijado* $s \in S$

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \forall k \geq k_0 : |f_k(s) - f(s)| < \epsilon.$$

Definición 1.8 *(Convergencia uniforme) Sea* $S \subset \mathbb{R}$ *un conjunto,* $(f_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones de* S *en* $\mathbb{R}$ *y* $f : S \to \mathbb{R}$*. Decimos que la sucesión* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformemente a* f *en* S *si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \forall k \geq k_0 : |f_k(s) - f(s)| < \epsilon, \quad \forall\, s \in S.$$

Decimos que f *es el límite uniforme de* (f_n) *y que* $f_n \to f$ *uniformemente en* S*.*

En la convergencia puntual, k_0 depende de s y en la uniforme no.
Procedemos a dar las condiciones necesarias y suficientes para que

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g_n(x)dx, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi x), \qquad f(0) = f(1) = 0,$$

donde los coeficientes c_n se definen como

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x) sen\,(n\pi x)\,dx.$$

Teorema 1.5 *Si* $f \in \mathcal{C}^2[0,1]$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi x)$ *converge uniformemente.*

Teorema 1.6 *Suponemos que* $g_n \to g$ *uniformemente en* (a, b)*. Entonces,*

- *Si* $g_k \in \mathcal{C}^0(a, b) \Rightarrow g \in \mathcal{C}^0(a, b)$*.*
- $$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b \lim_{k\to\infty} g_k(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^b g_k(x)dx.$$

Ahora ya estamos en condiciones de decir cuándo "conmutan" la integral y el sumatorio:

Teorema 1.7 *Se tiene*

- $\displaystyle\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b g_k(x)dx.$
- *Si* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ *converge uniformemente y* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x)$ *converge uniformemente entonces*

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \quad y \quad g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x).$$

Definición 1.9
- *La función* f *es continua a trozos en* $[a,b]$ *si* f *es continua en* $[a,b]$ *salvo en un número finito de puntos donde tiene discontinuidades de tipo salto, es decir, existen límites laterales*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x^+), \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x^-).$$

- *La función* f *es de clase* $\mathcal{C}^1$ *a trozos,* $f \in \mathcal{C}^1$ *a trozos, si* f *y* f' *son continuas a trozos.*

Lema 1.1 *(Lema de Riemann-Lebesgue) Sea* f *una función continua a trozos en* $[a,b]$ *y* $\displaystyle\int_a^b |f(x)dx| < \infty$. *Entonces*

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_a^b f(x)\cos(\lambda x)dx = 0 = \lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_a^b f(x)\operatorname{sen}(\lambda x)dx.$$

Criterio M de Weierstrass

Suponemos que existen c_k tales que $|g_k| \leq c_k$, con $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$. Entonces $\sum_{k=0}^{\infty} g_k = g$ uniformemente.

Teorema 1.8 *Sea* $f(x)$ *una función definida en* $[-L,L]$ *(extendida periódicamente a todo* $\mathbb{R}$*) que sea continua a trozos y absolutamente integrable. Para cada punto* x_0 *donde* f *es continua, la serie de Fourier de* f *converge a* $f(x_0)$ *si para algún* $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| \frac{f(x_0+s) - f(s)}{s} \right| ds < \infty.$$

Si x_0 *no es punto de continuidad*

$$S_n f \to \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

En este punto es importante recordar la fórmula o relación de Euler, atribuida al matemático Leonhard Euler, que establece que:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\operatorname{sen}(x),$$

para todo número real x. Aquí, e es la base del logaritmo natural, i es la unidad imaginaria $i^2 = -1$ y sen, cos son las funciones trigonométricas.

La fórmula puede interpretarse geométricamente como una circunferencia de radio unidad en el plano complejo, dibujada por la función e^{ix} al variar x sobre los números reales. Así, x es el ángulo de una recta que conecta el origen del plano y un punto sobre la circunferencia unidad, con el eje positivo real, medido en sentido contrario a las agujas del reloj y en radianes. La fórmula solo es válida si también el seno y el coseno tienen sus argumentos en radianes.

La fórmula de Euler fue demostrada por primera vez por Roger Cotes en 1714, y luego redescubierta y popularizada por Euler en 1748. Es interesante notar que ninguno de los descubridores vio la interpretación geométrica señalada anteriormente: la visión de los números complejos como puntos en el plano surgió unos 50 años más tarde.

TÍTULOS PUBLICADOS

ÁLGEBRA LINEAL, *R. E. Larson, B. H. Edwards, D. C. Falvo, L. Abellanas Rapún.*
ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA, *P. Alberca Bjerregaard y D. Martín Barquero.*
ANÁLISIS DE DATOS EN LAS CIENCIAS DE LA ACTIVIDAD FÍSICA Y DEL DEPORTE, *M.ª I. Barriopedro y C. Muniesa.*
CÁLCULO, *P. Alberca Bjerregaard y D. Martín Barquero.*
CURSO DE GENÉTICA MOLECULAR E INGENIERÍA GENÉTICA, *M. Izquierdo Rojo*
ECOLOGÍA, *J. Rodríguez.*
ECUACIONES DIFERENCIALES II, *C. Fernández Pérez y J. M. Vegas Montaner.*
ECUACIONES DIFERENCIALES EN DIFERENCIAS Y EN DERIVADAS PARCIALES*, M. Negreanu y A. Manuel Vargas.*
ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES, *M. Solaguren-Beascoa Fernández.*
ENZIMOLOGÍA, *I. Núñez de Castro.*
FÍSICA CUÁNTICA, *C. Sánchez del Río (coord.).*
FISIOLOGÍA VEGETAL, J*. Barceló Coll, G. Nicolás Rodrigo, B. Sabater García y R. Sánchez Tamés.*
FLEXIBILIDAD. Nuevas metodologías para el entrenamiento de la flexibilidad, *E. H. M. Dantas, M. C. de S. C. Conceição y A. Alías (coords.).*
INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES, *J. A. Facenda Aguirre, F. J. Freniche Ibáñez.*
INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA Y SUS APLICACIONES, *R. Cao Abad, M. Francisco Fernández, S. Naya Fernández, M. A. Presedo Quindimil, M. Vázquez Brage, J. A. Vilar Fernández, J. M. Vilar Fernández.*
MATEMÁTICAS BÁSICAS PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD, *Á. M. Ramos del Olmo y J. M.ª Rey Cabezas*
MÉTODOS NUMÉRICOS. Teoría, problemas y prácticas con MATLAB, *J. A. Infante del Río y J. M.ª Cabezas.*
PROBLEMAS, CONCEPTOS Y MÉTODOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO. 1. Números reales, sucesiones y series, *M. de Guzmán y B. Rubio.*
PROBLEMAS, CONCEPTOS Y MÉTODOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO. 2. Funciones, integrales, derivadas, *M. de Guzmán y B. Rubio.*
PROBLEMAS DE GENÉTICA RESUELTOS, Desde Mendel hasta la genética cuantitativa, *M. D. Llobat.*
PROBLEMAS NO RUTINARIOS DE NÚMEROS COMPLEJOS, *J. M. Conde y J. M. Sepulcre.*
SERIES DE FOURIER Y APLICACIONES. Un tratado elemental, con notas históricas y ejercicios resueltos, *A. Cañada Villar.*
TABLAS DE COMPOSICIÓN DE ALIMENTOS, *O. Moreiras, A. Carbajal, L. Cabrera y C. Cuadrado.*
TECNOLOGÍA MECÁNICA Y METROTECNIA, *P. Coca Rebollero y J. Rosique Jiménez.*
TERMODINÁMICA Y CINÉTICA QUÍMICA PARA CIENCIAS DE LA VIDA Y DEL MEDIOAMBIENTE. 100 problemas resueltos, *J. A. Anta, S. Calero y A. Cuetos.*