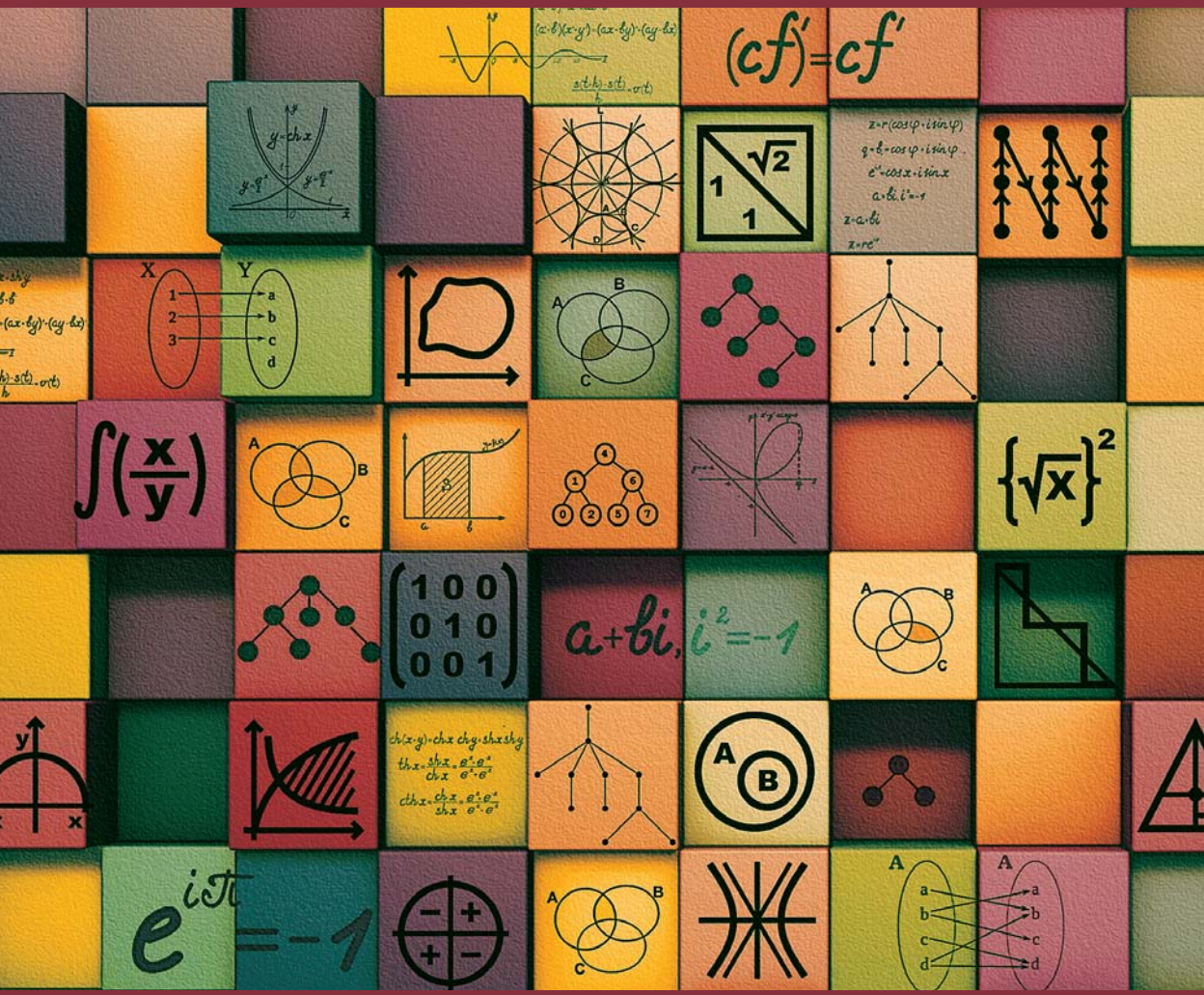
Fundamentos de álgebra

Felipe Zaldívar



EDICIONES
CIENTÍFICAS
UNIVERSITARIAS

TEXTO CIENTÍFICO
UNIVERSITARIO

Felipe Zaldívar estudió la licenciatura y maestría en matemáticas en la Universidad Nacional Autónoma de México, y obtuvo el doctorado en la University of Western Ontario, en Canadá. Ha sido profesor visitante en la George Washington University, en Washington, D. C., y actualmente es profesor titular de matemáticas en la Universidad Autónoma Metropolitana-I, en la Ciudad de México.

Ediciones Científicas Universitarias

Serie Texto Científico Universitario

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA

FELIPE ZALDÍVAR

Fundamentos de álgebra

FONDO DE CULTURA ECONÓMICA

Primera edición (Ciencia y Tecnología), 2005
Segunda edición (Ediciones Científicas Universitarias), 2018
Primera reimpresión, 2023

[Primera edición en libro electrónico, 2023]

Zaldívar, Felipe
Fundamentos de álgebra / Felipe Zaldívar. — 2ª ed. — México : FCE, 2018
300 p. : ilus. ; 23 × 17 cm — (Colec. Ediciones Científicas Universitarias)
ISBN 978-607-16-5681-0

1. Álgebra 2. Lógica 3. Matemáticas – Estudio y enseñanza I. Ser. II. t.

LC QA341 Dewey 512 Z324f

Distribución mundial

Carretera Picacho-Ajusco, 227; 14110 Ciudad de México
www.fondodeculturaeconomica.com
Comentarios: editorial@fondodeculturaeconomica.com
Tel.: 55-5227-4672

Diseño de portada: Teresa Guzmán Romero

ISBN 978-607-16-5681-0 (rústica)
ISBN 978-607-16-8071-6 (pdf)

Impreso en México • *Printed in Mexico*

ÍNDICE GENERAL

PRÓLOGO

Double, double, toil and trouble;
Fire burn, and cauldron bubble.

Macbeth, IV.1

En años recientes se han dado varios cambios en los cursos que se imparten en la licenciatura en matemáticas, en especial se han creado algunos cursos diseñados para introducir al estudiante en algunas de las ideas y métodos del pensar matemático cuando el alumno recién ha ingresado a la universidad. Algunos de estos cursos retoman ideas y contenidos de cursos que tradicionalmente se han impartido en otras universidades adaptándolas a los tiempos y circunstancias en este principio de siglo. Al impartir algunos de estos cursos, la experiencia en el salón de clases y la interacción con los alumnos nos llevó a la idea de escribir un texto donde las ideas matemáticas se trataran, desde el principio, con un hilo conductor visible y donde el estudiante fuera un participante activo.

En este libro se parte de unas ideas sencillas de lógica y conjuntos que formalizan, hasta donde es posible en un nivel elemental, el lenguaje que se usará a todo lo largo y ancho del texto (y más allá), incluyendo la notación e ideas básicas de la teoría de conjuntos que permea la matemática. Una vez desarrollado lo anterior, el libro comienza propiamente: relaciones y funciones son conceptos fundamentales en toda la matemática y se discuten con la amplitud necesaria. Después, usando el lenguaje e ideas anteriores, empieza el estudio de las estructuras numéricas: números naturales, enteros, racionales, reales y complejos. El método es simple: se comienza elementalmente y se avanza construyendo sobre lo discutido previamente; a veces hay repeticiones de ideas o métodos: esto es intencional para que el estudiante descubra las estructuras elementales de la matemática y, después de poco tiempo, ya se puedan ir dejando varios detalles de los desarrollos al estudiante. Hay una línea bien marcada que va desde los números naturales hasta los números complejos, sin omitir detalles en el camino (por ejemplo, los números reales se construyen con ideas sencillas adaptadas al nivel del libro).

A lo largo del texto se incluyen ejercicios que complementan lo discutido previamente. Los ejercicios son importantes y se requiere que los estudiantes los vayan haciendo conforme avanza el libro: la matemática es un deporte de participantes y no de espectadores. También se han incluido algunos temas, bajo el nombre de *proyectos*, con la idea de que pueden ser omitidos en una primera lectura, y de hecho se sugieren como lecturas adicionales para el estudiante, fuera de clases, individualmente o en equipo; algunos de estos proyectos exigen más del estudiante y las ideas involucradas sólo se han bosquejado y los ejercicios demandan más involucramiento y madurez, de tal forma que a veces habrá que esperar algún tiempo para su comprensión cabal, por el momento dejando ideas abiertas que motivarán desarrollos posteriores para lo cual hemos incluido algunas referencias bibliográficas que complementan y amplían los temas discutidos en estos proyectos. Regresando al texto propio, notamos que algunos ejercicios duplican ideas ya discutidas, otros las complementan y otros más introducen ideas nuevas que se desarrollarán en cursos posteriores. Por ejemplo, en el capítulo II, la idea de *contar* motiva la existencia de los números naturales y ciertas ideas combinatorias lo ilustran; sin embargo, aquí sólo se encontrarán unos pocos párrafos y ejercicios de matemática combinatoria. Tiempo habrá para que el estudiante profundice esto después. Otro ejemplo es el concepto de *grupo* que de alguna forma está presente desde el capítulo I y, sin embargo, no se le ha definido en forma explícita, aun cuando hay temas que bien lo hubieran requerido. De nuevo, el tiempo llegará cuando este importante concepto aparezca y quizás el joven lector de este libro mirará hacia atrás y leerá las líneas donde el concepto estaba presente-ausente. Si así sucediera, alguna de las metas del libro se habrá alcanzado.

Agradecimientos. De las muchas cosas que le debo a Helen y Dan —además de su curiosidad por algunos temas de este libro—, los dibujos incluidos son de Dan, la cita de Shakespeare es de Helen (que cuando debía estudiar álgebra prefería leer a Camus, lo cual yo siempre aprobaría), y varias conversaciones animadas sobre nuestras lecturas de Tolkien, en diferentes épocas, incluyendo los versos

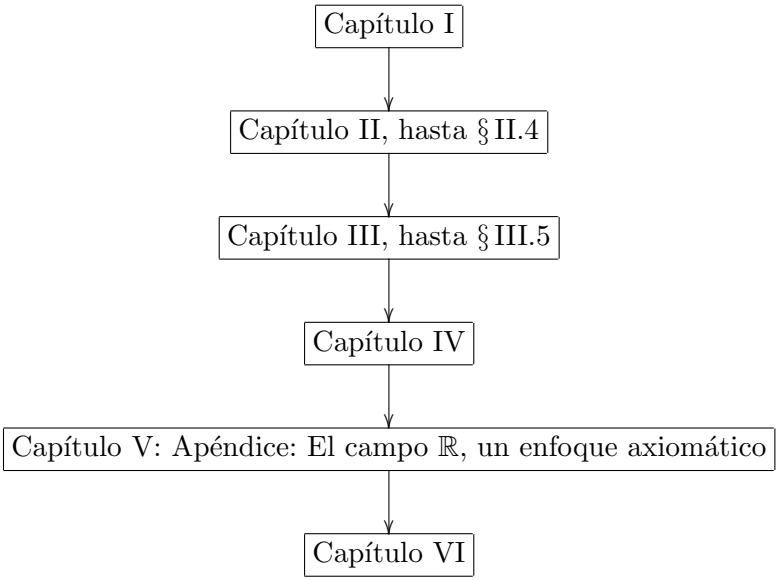
> *One ring to rule them all, One ring to find them,*
> *One ring to bring them all and in the darkness bind them*
> *In the Land of Mordor where the Shadows lie.*

cada vez que yo hablaba de *anillos*.

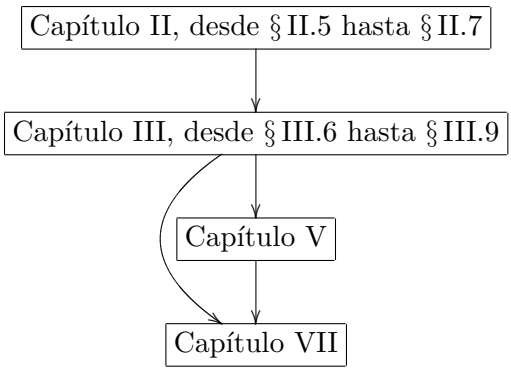
Mis colegas M. J. Arroyo, A. García, L. Hidalgo, G. Izquierdo, B. Llano, H. Martínez, M. Pineda, A. Reyes, J. Solís y A. Wawrzyńczyk usaron versiones preliminares del texto en sus cursos y sus observaciones, comentarios y sugerencias han contribuido a mejorar la presentación y disminuir el número de errores tipográficos, para beneficio del lector y del autor.

Quiero agradecer especialmente el apoyo profesional de la Lic. María del Carmen Farías, responsable del Área de Ciencias del FCE, y a Axel Retif por su paciencia y comprensión en la formación y edición en TEX del manuscrito final.

Sugerencias. Este libro se puede usar en varios cursos, cambiando el orden de la lectura de sus capítulos y secciones. Un primer curso puede estructurarse como sigue:



Un segundo curso se puede estructurar con las secciones faltantes:



I. CONJUNTOS, RELACIONES Y FUNCIONES

En este capítulo se introducen algunos conceptos y métodos que se usarán a lo largo de todo el libro, comenzando con algunos resultados elementales de lógica que nos serán útiles en el análisis y construcción de argumentos; estos resultados serán usados inmediatamente en la introducción del lenguaje y notación de conjuntos. Una vez establecido lo anterior, se introduce el importante concepto de relación entre conjuntos, en particular se estudian las relaciones de equivalencia y las funciones, conceptos de fundamental importancia en toda la matemática.

I.1 Lógica

Esta sección es un resumen de algunos resultados elementales de lógica necesarios para el estudio que emprenderemos. En las líneas siguientes no hay la intención de estudiar propiamente la lógica matemática: sólo se recuerdan o introducen algunos conceptos e ideas que aclaran el uso común de ciertos términos lógicos. La lógica podemos pensarla como el estudio y análisis de los métodos de razonamiento: en todo el libro encontraremos argumentos para probar ciertos resultados y la lógica nos provee de métodos para analizar la corrección de estos argumentos. En forma simplificada pensaremos que un argumento es un conjunto de afirmaciones encadenadas de tal forma que partiendo de ciertas hipótesis, llamadas premisas, al final se obtiene una cierta afirmación (llamada conclusión) y la lógica garantiza que la estructura por medio de la cual se enlazan las afirmaciones de este argumento sea correcta, de tal forma que la conclusión sea en efecto consecuencia de las premisas. A la lógica propiamente no le interesa si las premisas o la conclusión son verdaderas o falsas: lo único que interesa es la validez del argumento.

La (pequeña) parte de la lógica que usaremos se refiere a ciertas afirmaciones sobre objetos dados y requerimos que estas afirmaciones sean de tal forma que podamos decir si son *verdaderas o falsas*. A estas afirmaciones las

llamamos *proposiciones*. Las afirmaciones siguientes son ejemplos de proposiciones:

(1) *El número 6 es par.*

(2) *El número 8 es primo.*

Algunas oraciones o afirmaciones como: *mañana tal vez estudie* no se puede decir si son falsas o verdaderas y así no las consideraremos proposiciones.

Usaremos letras como p, q, r para denotar a las proposiciones y tablas como la que sigue para denotar los *valores verdadero* v o *falso* f que puede tomar una proposición:

p
v
f

Las proposiciones pueden combinarse entre sí para dar lugar a nuevas proposiciones. Las operaciones con proposiciones que nosotros consideraremos son las siguientes:

Negación. Dada una proposición p, su *negación*, denotada $\neg p$ (se lee: no-p) es la proposición que tiene los valores de verdad opuestos a los de p. La tabla siguiente denota lo anterior:

p	$\neg p$
v	f
f	v

Ejemplo 1.

p: 7 es un número primo.

$\neg p$: 7 *no* es un número primo.

Conjunción. Dadas dos proposiciones p, q, su *conjunción* denotada $p \wedge q$ (se lee: p y q) es la proposición que es v sólo cuando ambas proposiciones p, q son verdaderas, y es f cuando alguna de ellas es falsa. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

Disyunción. Dadas dos proposiciones p, q, su *disyunción* denotada $p \vee q$ (se lee: p o q) es la proposición que es v cuando alguna de las proposiciones p, q es verdadera y es f únicamente cuando las dos son falsas. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Implicación. Dadas dos proposiciones p, q, la *implicación* denotada $p \Rightarrow q$ (se lee: p implica q o si p entonces q o q se sigue de p) es la proposición que es f cuando la hipótesis p es v y la conclusión q es f y es v en todos los otros casos, en particular es v en todos los casos cuando la hipótesis es f. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Rightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Equivalencia. Dadas dos proposiciones p, q, diremos que son *equivalentes*, denotado $p \Leftrightarrow q$ (se lee: p equivalente a q o p si y sólo si q) cuando ambas proposiciones p y q tengan los mismos valores de verdad. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

Observaciones. Las definiciones anteriores se deben tomar como definiciones del uso lógico de las palabras: *no, y, o, implica, equivalente*. Se suelen llamar *conectivos lógicos* a estas palabras.

Notemos ahora que al tomar dos proposiciones sus valores de verdad se combinan en cuatro posibilidades. En general, dadas n proposiciones aceptaremos que sus valores de verdad se combinan en 2^n posibilidades y las distribuiremos comenzando con la mitad de v y luego la mitad de f para la primera proposición, después la cuarta parte de v y de f alternando para la segunda proposición, etcétera.

Al combinar más de dos proposiciones usaremos paréntesis para indicar claramente cómo son las combinaciones para cada par individual y en el orden que se quieren hacer las operaciones. Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 2. Escribir la tabla de verdad de la proposición $(p \wedge q) \vee r$. Para esto, notamos que aquí tenemos $n = 3$ proposiciones por lo que hay $2^3 = 8$ combinaciones de sus valores de verdad, las cuales listamos en las primeras tres columnas de la tabla siguiente. La cuarta columna la obtenemos de la definición de la conjunción $p \wedge q$, y la última columna la obtenemos de la definición de disyunción usando ahora los valores de verdad de la cuarta columna y de la tercera:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
v	v	v	v	v
v	v	f	v	v
v	f	v	f	v
v	f	f	f	f
f	v	v	f	v
f	v	f	f	f
f	f	v	f	v
f	f	f	f	f

Fórmulas usuales. A continuación listamos algunas equivalencias que usaremos constantemente. Por supuesto que para mostrar que en efecto son equivalencias debemos mostrar que sus valores de verdad son los mismos y para esto hay que construir sus tablas de verdad (nótese que aquí hemos denotado a la equivalencia $\Leftrightarrow$ como $\equiv$; a veces usamos esta notación alterna). Esto lo dejamos como ejercicios para la lectora o lector:

Ejercicio 1. Usando tablas de verdad, compruebe las equivalencias siguientes:

1. $\neg(\neg p) \equiv p$.
2. $p \wedge q \equiv q \wedge p$.
3. $p \vee q \equiv q \vee p$.
4. $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$.
5. $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$.
6. $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.
7. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$.
8. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$.
9. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$.
10. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.
11. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
12. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

A las fórmulas (2) y (3) las llamamos *leyes de conmutatividad* para los conectivos $\wedge$ y $\vee$. A las leyes (7) y (8) las llamamos *leyes de De Morgan*; a las leyes (9) y (10) las llamamos *leyes de asociatividad* para los conectivos $\wedge$ y $\vee$, y a las leyes (11) y (12) las llamamos *leyes de distributividad* para los conectivos involucrados.

Cuantificadores lógicos. Algunos argumentos no se pueden analizar con el cálculo proposicional que hemos visto hasta ahora, un ejemplo clásico es el siguiente:

p: *Todos los hombres son mortales.*
q: *Sócrates es hombre.*
r: *Sócrates es mortal.*

De alguna manera la proposición r se sigue de p y q, pero esto no se puede deducir formalmente del cálculo proposicional visto hasta ahora. El punto importante es que para asignarle valores de verdad a las proposiciones p, q, r sus combinaciones involucran términos nuevos, en este caso el término *todos*, que es parte importante de la estructura interna de la proposición p. Se hace necesario entonces refinar el cálculo proposicional anterior para incluir en el lenguaje formal proposiciones que afirmen algo acerca de *todos* o *algunos* miembros de una cierta clase de objetos. Llamaremos *cuantificadores lógicos* a estas palabras y tenemos dos de ellos:

Cuantificador universal. Si todos los miembros de una clase satisfacen una cierta propiedad, lo denotaremos mediante:

$$\forall x\,(P(x))$$

donde aquí el símbolo $\forall$ se lee *para todo* o *todo*, la letra x es una *variable* que denota no a un miembro particular de una clase, sino a un elemento genérico o arbitrario de la clase en consideración. El símbolo $P(x)$ denota una *propiedad* que debe satisfacer el término x. El valor de verdad de una afirmación de la forma $\forall x\,(P(x))$ es v cuando $P(x)$ sea v para todos los valores posibles de x, y es f cuando $P(x)$ sea f para algún valor de x.

Ejemplo 3. Denotemos con
$H(x)$: *x es un hombre.*
$M(x)$: *x es mortal.*

Entonces, la afirmación: *todos los hombres son mortales* se denota:

$$\forall x\,(H(x) \Rightarrow M(x)).$$

Ejercicio 2. ¿Cómo se lee la afirmación: $\forall x\,(H(x) \Rightarrow \neg M(x))$?

Cuantificador existencial. Si al menos un elemento x de una cierta clase satisface la propiedad $P(x)$, lo denotamos por:

$$\exists x\,(P(x))$$

donde aquí el símbolo $\exists$ se lee *existe*, el símbolo x es una variable y $P(x)$ es una propiedad sobre el elemento x. De esta forma, el valor de verdad de una afirmación de la forma $\exists x\,(P(x))$ es v cuando $P(x)$ sea v para algún valor de x y es f cuando $P(x)$ sea f para todos los valores de x.

Nótese que las definiciones anteriores nos permiten negar afirmaciones con cuantificadores:

(I) La negación de una afirmación de la forma $\forall x(P(x))$ es:

$$\neg(\forall x\,P(x)) \equiv \exists x\,(\neg P(x)).$$

(II) La negación de una afirmación de la forma $\exists x(P(x))$ es:

$$\neg(\exists x\,P(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x)).$$

Ejemplo 4. Denotemos con

$P(x)$: *x es un entero par* y con $T(x)$: *x es un primo.*

Entonces, la afirmación: *hay primos que son pares* formalmente se denota por:

$$\exists x\,(T(x) \wedge P(x)).$$

EJERCICIO 3. ¿Cómo se lee la afirmación: $\exists x\,(T(x) \wedge \neg P(x))$?

I.2 CONJUNTOS

Esta sección es un resumen de notación y propiedades básicas de la teoría de conjuntos necesarios para los capítulos siguientes. El lenguaje y notación de conjuntos provee un marco natural en el cual se pueden formular las teorías matemáticas que iremos encontrando. Los elementos del lenguaje de la teoría de conjuntos que introduciremos ilustran el uso del lenguaje formal de la lógica que vimos en la sección anterior.

El término *conjunto* lo consideraremos un concepto primitivo no definido (podemos pensarlo como un *agregado* o *familia* de objetos, etc.; sin embargo, los términos *agregado*, *familia*, etc., son de alguna forma sinónimos del término *conjunto*); al pensar en un conjunto, pensaremos en los *miembros* o *elementos* que lo constituyen, de tal forma que desde el inicio hay una relación entre los *elementos* y los *conjuntos*, a saber, un elemento puede *pertenecer* o *no pertenecer* a un conjunto dado. Si denotamos a los conjuntos con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ y a los elementos con letras minúsculas $a, b, c, \ldots$, la *relación de pertenencia* anterior la denotaremos con el símbolo $\in$. Por ejemplo, si V denota al conjunto de *vocales* del idioma español, entonces la letra e pertenece al conjunto de vocales y esto lo denotamos mediante

$$e \in V.$$

Como la letra b no es vocal, entonces no pertenece al conjunto de vocales y esto lo denotamos mediante $b \notin V$. En términos lógicos se tiene la negación de la relación de pertenencia:

$$b \notin V \Leftrightarrow \neg(b \in V).$$

Al describir un conjunto podemos *listar* sus elementos poniéndolos entre llaves, por ejemplo

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

o podemos *describir* el conjunto mediante una *propiedad* que satisfacen únicamente los elementos del conjunto. En este caso se usa la notación:

$$V = \{x \ : \quad x \text{ es una vocal}\}.$$

En esta notación, a la que leemos: *V es el conjunto de aquellos elementos x tales que x es una vocal*, observamos lo siguiente:

- x es un elemento genérico (aquí no es la letra x).
- Los dos puntos ":" se leen como *tal que* o *tales que*.
- La propiedad $P(x)$ que satisface x es la que describe genéricamente al conjunto.
- De nuevo usamos llaves para denotar al conjunto en consideración.

Ejemplo 5. El conjunto de enteros positivos lo podemos escribir como:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

donde los puntos suspensivos indican que la lista continúa indefinidamente en la forma indicada. También podemos escribir este conjunto mediante:

$$\mathbb{N} = \{x \ : \quad x \text{ es un entero positivo}\}.$$

Ejemplo 6. El conjunto de los enteros primos positivos lo podemos escribir como:

$$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$$

listando suficientes elementos para saber de cuáles números se está hablando.

Ejemplo 7. El conjunto de las potencias positivas de 2 lo podemos escribir como:

$$C = \{x \ : \ x = 2^n \text{ con } n \text{ un entero positivo}\} = \{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}.$$

Podemos *comparar* dos conjuntos considerando los elementos que contienen:

Inclusión. Dados dos conjuntos A y B, si sucede que todos los elementos de A también son elementos de B, lo denotamos mediante

$$A \subseteq B$$

y decimos que A es *subconjunto* de B o que A está *contenido* en B. En lenguaje lógico la relación de inclusión anterior está definida por:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

La negación de esta relación se denota $A \not\subseteq B$, y así

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B),$$

es decir, $A \not\subseteq B$ si y sólo si existe algún elemento de A que no está en B.

Igualdad. Dados dos conjuntos A y B, diremos que son *iguales*, denotado mediante $A = B$, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Éste es el momento para introducir un conjunto que, a diferencia de los que hemos considerado hasta ahora, *carece de elementos*:

El conjunto vacío. Un *conjunto vacío* es un conjunto que no tiene elementos. Se suele usar la letra danesa $\emptyset$ para denotar a un conjunto vacío y la propiedad lógica que lo define es:

$$\forall x(x \notin \emptyset)$$

o lo que es lo mismo $\neg(\exists x(x \in \emptyset))$.

A continuación probaremos que sólo hay un conjunto vacío, y para esto probaremos primero que, extraño como parezca a primera vista, un conjunto vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto:

PROPOSICIÓN I.1. *Si $\emptyset$ es un conjunto vacío y A es cualquier otro conjunto, entonces $\emptyset \subseteq A$.*

Demostración. Supongamos que la afirmación $\emptyset \subseteq A$ es falsa; entonces su negación $\emptyset \not\subseteq A$ es verdadera. Así, $\exists x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Pero no es posible que $\exists x \in \emptyset$ ya que $\emptyset$ es vacío. Se sigue que la negación $\emptyset \not\subseteq A$ debe ser falsa, por lo que $\emptyset \subseteq A$ es verdadera. □

Una proposición que es consecuencia (casi) inmediata de otra proposición se suele llamar un *corolario*.

COROLARIO I.2. *Sólo hay un conjunto vacío.*

Demostración. Supongamos que $\emptyset_1$ y $\emptyset_2$ son dos conjuntos vacíos. Como $\emptyset_1$ es vacío y $\emptyset_2$ es otro conjunto, entonces, por la propiedad anterior, $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$. Invirtiendo los papeles de $\emptyset_1$ y $\emptyset_2$ se tiene que $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$. Se sigue que $\emptyset_1 = \emptyset_2$. □

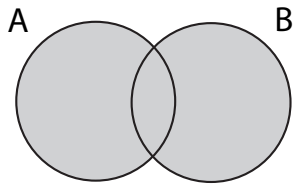
De ahora en adelante podemos hablar *del* conjunto vacío $\emptyset$.

Operaciones con conjuntos. Por medio de las operaciones que describiremos a continuación se obtienen nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados.

Unión. Si A, B son conjuntos, la *unión* de A con B es el conjunto

$$A \cup B := \{x \ : \ x \in A \vee x \in B\}.$$

Aquí $\vee$ es la disyunción lógica y así para que un elemento x pertenezca a la unión $A \cup B$ basta con que esté en A o que esté en B. En ocasiones se usan diagramas como el siguiente para denotar a la unión de A con B:



donde el área sombreada denota al nuevo conjunto $A \cup B$.

Ejercicio 4. Si A, B, C son conjuntos, demuestre que:

(1) $A \cup B = B \cup A$ (conmutatividad de la unión).

(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asociatividad de la unión).

(3) $A \cup A = A$.

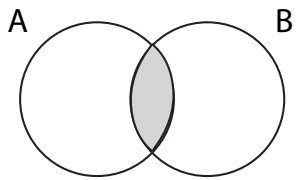
(4) $A \cup \emptyset = A$.

(5) $A \subseteq A \cup B$.

Intersección. Si A, B son conjuntos, la *intersección* de A con B es el conjunto

$$A \cap B := \{x \ : \ x \in A \wedge x \in B\}.$$

Aquí $\wedge$ es la conjunción lógica y así para que un elemento x pertenezca a la intersección $A \cap B$ es necesario que esté en A y que esté en B. En ocasiones se usan diagramas como el siguiente para denotar a la intersección $A \cap B$:



donde el área sombreada indica el conjunto $A \cap B$.

EJERCICIO 5. Si A, B, C son conjuntos, demuestre que:

(1) $A \cap B = B \cap A$ (conmutatividad de la intersección).

(2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociatividad de la intersección).

(3) $A \cap A = A$.

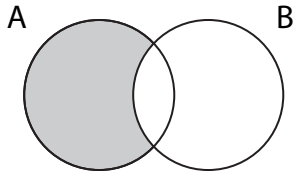
(4) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(5) $A \cap B \subseteq A$.

Diferencia. Si A, B son conjuntos, la *diferencia* de A con B es el conjunto

$$A - B := \{x \ : \ x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Aquí $\wedge$ es la conjunción lógica y así para que un elemento x pertenezca a la diferencia $A - B$ se requiere que esté en A y que no esté en B. En ocasiones se usan diagramas como el siguiente para denotar a la diferencia $A - B$:



donde el área sombreada indica el conjunto $A - B$.

EJERCICIO 6. Si A, B son conjuntos, demuestre que:

(1) $A - A = \emptyset$.

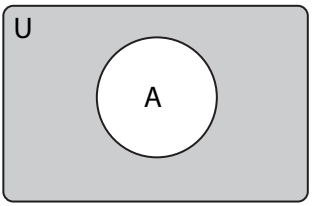
(2) $A - \emptyset = A$.

(3) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Complemento. Si todos los conjuntos que se están considerando en una cierta situación son subconjuntos de un conjunto dado U y si $A \subseteq U$, el *complemento* de A en U es la diferencia

$$A^c := \{x \ : \ x \in U \wedge x \notin A\} = U - A.$$

En ocasiones se usan diagramas como el siguiente para denotar al complemento A^c:



donde el área sombreada indica el conjunto A^c.

EJERCICIO 7. Si $A \subseteq U$, demuestre que:

(1) $(A^c)^c = A$.

(2) $\emptyset^c = U$.

(3) $U^c = \emptyset$.

(4) $A \cup A^c = U$.

(5) $A \cap A^c = \emptyset$.

(6) Si $B \subseteq U$ es otro conjunto, $A - B = A \cap B^c$.

A continuación probamos algunas propiedades importantes de estas operaciones:

PROPOSICIÓN I.3. *Si A, B, C son subconjuntos de un conjunto U, entonces:*

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(3) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(4) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Las propiedades (1) y (2) se llaman las *leyes distributivas* para la intersección y la unión de conjuntos. Las propiedades (3) y (4) son las *leyes de De Morgan.*

Demostración. Probaremos (1) y (3). Para (1), mostraremos primero que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. En efecto, dado cualquier $x \in A \cap (B \cup C)$ entonces por definición de intersección $x \in A \wedge x \in (B \cup C)$ y por definición de unión

$$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

y usando la ley distributiva de los conectivos lógicos $\wedge$ y $\vee$ se sigue que

$$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

es decir,

$$(x \in (A \cap B)) \vee (x \in (A \cap C))$$

i.e., $x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$, y por lo tanto $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Para la otra inclusión $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ se procede en forma similar.

Para (3), mostraremos primero que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$. En efecto, si $x \in (A \cap B)^c$ por definición de complemento $x \notin (A \cap B)$ y usando los conectivos lógicos que definen la intersección y la negación se tiene que: $x \notin A \vee x \notin B$, por lo que $x \in A^c$ o $x \in B^c$ por definición de complemento; se sigue, por definición de unión, que $x \in A^c \cup B^c$ y por lo tanto $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

Para la otra inclusión $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$ se procede en forma similar. □

Ejercicio 8. Demuestre las otras dos propiedades faltantes en la proposición anterior.

Familias de conjuntos. En ocasiones se tienen varios conjuntos y conviene, por ejemplo si se tienen diez conjuntos, denotarlos con subíndices: A_1, A_2,..., A_{10} y se puede obtener su unión y su intersección, usando las propiedades de asociatividad, mediante:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}$$

y

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{10}.$$

En general, si se tienen n conjuntos podemos abreviar lo anterior escribiendo:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

y

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

observando que la notación de la parte izquierda es más económica, de tal manera que esta notación es la que usaremos cuando se tiene una familia infinita de conjuntos, por ejemplo si se tienen conjuntos A_1, A_2, ..., A_i,..., donde los índices son elementos del conjunto de los enteros positivos $\mathbb{N}$, las operaciones anteriores se denotan:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \qquad \text{y} \qquad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i.$$

En general se puede tener un conjunto de índices arbitrario, digamos I, y para cada índice $\alpha \in I$ se tiene un conjunto A_α. En esta situación diremos que los conjuntos A_α con $\alpha \in I$ forman una *familia de conjuntos indicada por el conjunto de índices* I. En los tres ejemplos previos el conjunto de índices es $I = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ e $I = \mathbb{N}$.

La unión de una familia de conjuntos A_α, $\alpha \in I$, es el conjunto:

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x \ : \ \exists \alpha \in I \text{ con } x \in A_\alpha\},$$

es decir, x pertenece a la unión de la familia si y sólo si x está en algún A_α:

$$x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha \in I \ \text{ tal que } \ x \in A_\alpha.$$

La intersección de la familia es el conjunto:

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x \ : \ \forall \alpha \in I \text{ se tiene que } x \in A_\alpha\},$$

es decir, x pertenece a la intersección de la familia si y sólo si x está en todos los conjuntos de la familia A_α:

$$x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \ \text{ se tiene que } \ x \in A_\alpha.$$

Recordando las negaciones de los cuantificadores lógicos y las definiciones anteriores se tiene que:

$$x \notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \ \text{ se tiene que } \ x \notin A_\alpha$$

y

$$x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha \in I \ \text{ tal que } \ x \notin A_\alpha.$$

Ejercicio 9. Si A_α, $\alpha \in I$ es una familia de conjuntos y M es cualquier otro conjunto, demuestre que:

(1) $M \cap \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I}(M \cap A_\alpha)$.

(2) $M \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I}(M \cup A_\alpha)$.

Si A_α, $\alpha \in I$ es una familia de conjuntos todos contenidos en un conjunto U, demuestre que:

(3) $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

(4) $\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

Ejercicio 10. Si A, B son conjuntos, se define la *diferencia simétrica* entre A y B mediante

$$A \triangle B := (A - B) \cup (B - A).$$

Demuestre que:

(i) La operación $\triangle$ es asociativa, es decir,

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C,$$

para cualesquiera conjuntos A, B, C.

(ii) La operación $\triangle$ es conmutativa, es decir,

$$A \triangle B = B \triangle A,$$

para cualesquiera conjuntos A, B.

(iii) $A \triangle \emptyset = A$, para cualquier conjunto A.

(iv) $A \triangle A = \emptyset$, para cualquier conjunto A.

I.3 Relaciones de equivalencia

Dados dos conjuntos A y B para formalizar la noción de *relación* entre elementos de A con elementos de B necesitaremos la noción de par ordenado. Para esto observemos que si $a \in A$ y $b \in B$, se tiene que $\{a, b\} = \{b, a\}$, y si $a \neq b$, diremos que el conjunto $\{a, b\}$ es un par no ordenado. También notamos que si sucediera que $a = b$, entonces $\{a, a\} = \{a\}$ y ni siquiera podemos hablar en este caso de un par no ordenado. El concepto de *par ordenado* se introduce para distinguir los elementos del conjunto $\{a, b\}$ de tal forma que se tenga un primer elemento y un segundo elemento. Se suele usar la notación

$$(a, b)$$

para denotar al par ordenado cuya *primera componente* es a y cuya *segunda componente* es b. La propiedad definitoria de este par ordenado nos dice que *dos pares ordenados* (a, b) *y* (c, d) *son iguales si y sólo si componente a componente son iguales.* En símbolos:

$$(*) \qquad (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \ \wedge \ b = d.$$

Siendo más formales, adoptaremos la definición de K. Kuratowski de un par ordenado en términos de la notación y lenguaje desarrollados hasta ahora. Dados elementos $a \in A, b \in B$ se define

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\},$$

es decir, (a, b) es el conjunto cuyos elementos son los conjuntos $\{a\}$ y $\{a, b\}$. Esta definición sólo usa la notación y lenguaje introducidos previamente y notamos que satisface la condición definitoria $(*)$:

Proposición I.4. $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \ \wedge \ b = d.$

Demostración. La implicación $(\Leftarrow)$ es obvia. Para la otra implicación, si $(a, b) = (c, d)$ entonces $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ y así se tienen dos casos:

(1) $\{a\} = \{c\}$ y $\{a, b\} = \{c, d\}$; se tiene entonces que $a = c$ por lo que $\{a, b\} = \{a, d\}$ y así $b = d$.

(2) $\{a\} = \{c, d\}$ y $\{a, b\} = \{c\}$; se tiene entonces que $a = c = d = b$. □

Producto cartesiano. Dados dos conjuntos A, B, se define el *producto cartesiano* de A con B como el conjunto de todos los pares ordenados cuya primera componente está en A y cuya segunda componente está en B; en símbolos:

$$A \times B := \{(a, b) \ : \ a \in A \wedge b \in B\}.$$

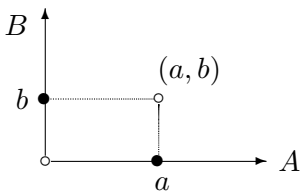
Aquí $A \times B$ se lee: A *cruz* B o *el producto cartesiano* de A con B.

Ejemplo 8. Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Nótese que, en general, $A \times B \neq B \times A$: en el ejemplo anterior $(1, a) \in A \times B$ pero $(1, a) \notin B \times A$.

En ocasiones conviene representar geométricamente el producto cartesiano $A \times B$ poniendo en un eje horizontal al conjunto A de primeras componentes y en un eje vertical al conjunto B de las segundas componentes:



En esta representación el par ordenado (a, b) corresponde al punto de abscisa a y ordenada b en el *plano* $A \times B$.

Relaciones. Podemos ahora formalizar el concepto de relación. Dados dos conjuntos A, B, una *relación entre elementos de* A *y elementos de* B es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$, *i.e.,* $R \subseteq A \times B$ y así R consiste de algunos pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$. Si $(a, b) \in R$ a veces lo denotaremos mediante aRb y decimos que *el elemento* a *está relacionado con* b. Si $(x, y) \notin R$ lo denotamos $x \not R y$. El *dominio* de una relación R es el conjunto formado por las primeras componentes de los pares ordenados de R. Usaremos la notación D_R para el dominio de R. Así,

$$D_R := \{a \in A \ : \ \text{existe } b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R\}.$$