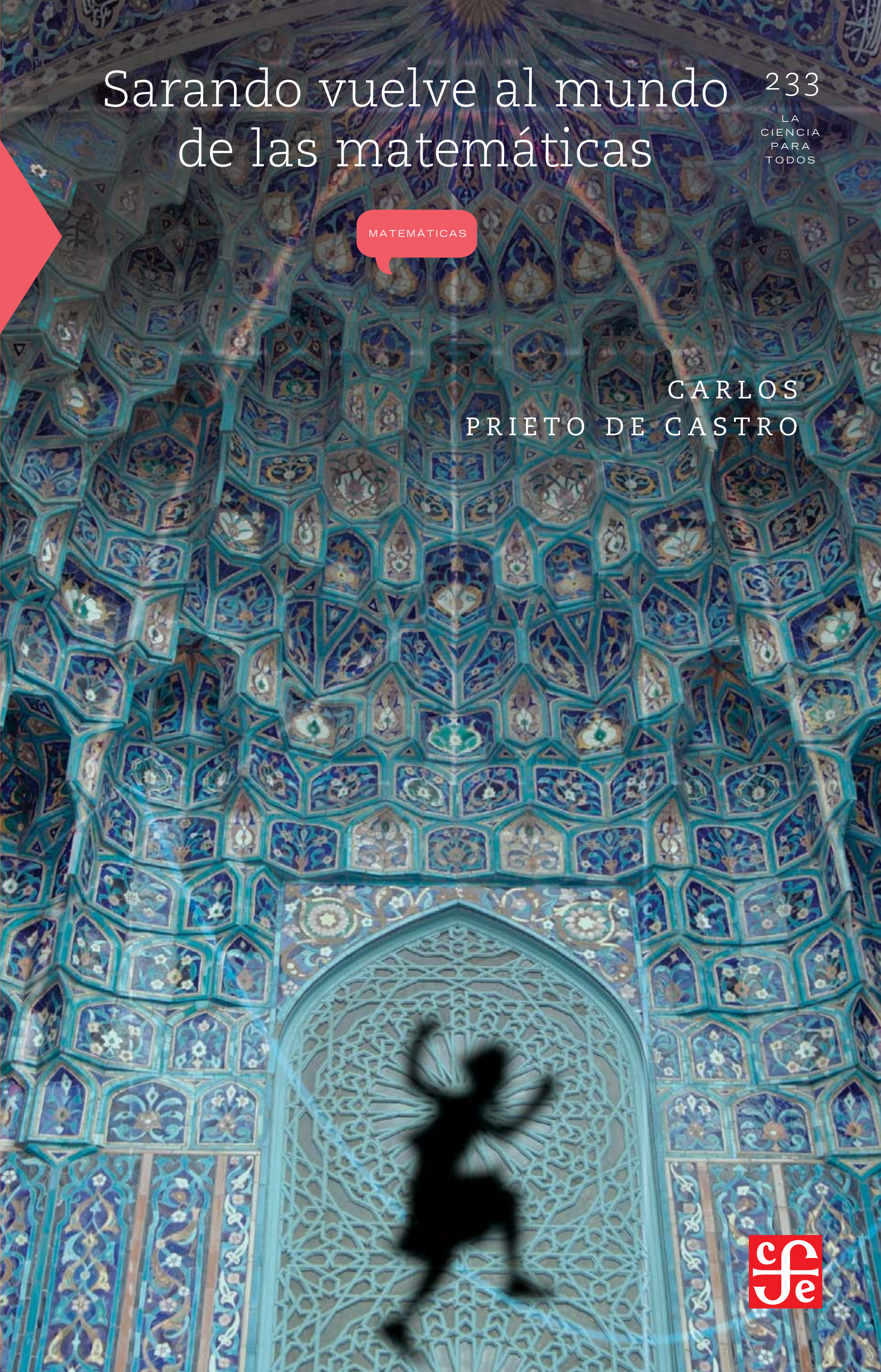
Sarando vuelve al mundo de las matemáticas

233
LA CIENCIA PARA TODOS

MATEMÁTICAS

CARLOS PRIETO DE CASTRO



fce

SARANDO VUELVE AL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS

La Ciencia
para Todos

Desde el nacimiento de la colección de divulgación científica del Fondo de Cultura Económica en 1986, ésta ha mantenido un ritmo siempre ascendente que ha superado las aspiraciones de las personas e instituciones que la hicieron posible. Los científicos siempre han aportado material, con lo que han sumado a su trabajo la incursión en un campo nuevo: escribir de modo que los temas más complejos y casi inaccesibles puedan ser entendidos por los estudiantes y los lectores sin formación científica.

A los 10 años de este fructífero trabajo se dio un paso adelante, que consistió en abrir la colección a los creadores de la ciencia que se piensa y crea en todos los ámbitos de la lengua española —y ahora también del portugués—, razón por la cual tomó el nombre de La Ciencia para Todos.

Del Río Bravo al Cabo de Hornos y, a través del mar océano, a la península ibérica, está en marcha un ejército integrado por un vasto número de investigadores, científicos y técnicos, que extienden sus actividades por todos los campos de la ciencia moderna, la cual se encuentra en plena revolución y continuamente va cambiando nuestra forma de pensar y observar cuanto nos rodea.

La internacionalización de La Ciencia para Todos no es sólo en extensión sino en profundidad. Es necesario pensar una ciencia en nuestros idiomas que, de acuerdo con nuestra tradición humanista, crezca sin olvidar al hombre, que es, en última instancia, su fin. Y, en consecuencia, su propósito principal es poner el pensamiento científico en manos de nuestros jóvenes, quienes, al llegar su turno, crearán una ciencia que, sin desdeñar a ninguna otra, lleve la impronta de nuestros pueblos.

Comité de selección de obras

Carlos Prieto de Castro

SARANDO VUELVE AL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

la
ciencia/233
para todos

Primera edición, 2012

Prieto de Castro, Carlos
Sarando vuelve al mundo de las matemáticas / Carlos Prieto de Castro. — México : FCE, SEP, Conacyt, 2012.
291 p. ; 21 × 14 cm — (Colec. La Ciencia para Todos ; 233) Texto para nivel medio y medio superior
ISBN 978-607-16-0638-9

1. Matemáticas — Historia 2. Matemáticas 3. Divulgación científica I. Ser. II. t.

LC QA 39 P75 Dewey 508.02 C569 V. 233

Distribución mundial

La Ciencia para Todos es proyecto y propiedad del Fondo de Cultura Económica, al que pertenecen también sus derechos. Se publica con los auspicios de la Secretaría de Educación Pública y del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Diseño de portada: Paola Álvarez Baldit

Carretera Picacho-Ajusco, 227; 14738 México, D. F.
Empresa certificada ISO 9001:2008

Comentarios: editorial@fondodeculturaeconomica.com
www.fondodeculturaeconomica.com
Tel. (55) 5227-4672; fax (55) 5227-4640

ISBN 978-607-16-0638-9

Impreso en México • *Printed in Mexico*

A mis adorados hijos,
Adrián y Sebastián

A la memoria de mi padre

ÍNDICE

PRÓLOGO

En la tranquila calle Albatros sigue viviendo la familia Portes. Su jardín es cada día más bello, pues doña Violeta se ocupa con afán de él. Los niños, Adrián y Sebastián, lo disfrutan mucho. Pero quien más disfruta es Sarando, el duende que vive escondido en una acogedora cueva debajo del pirul, detrás del macizo de hortensias. Su pasión por las matemáticas sigue plena y ha mantenido su costumbre de colarse a la biblioteca de don Joaquín, quien constantemente llega con nuevos libros, a cual más de atractivos.

En estas nuevas aventuras Sarando disfrutará de muy variados temas de las matemáticas. Va a intrigarse con preguntas aún no respondidas sobre los números primos, tratando de demostrar la conjetura de Goldbach o la de los primos gemelos. Aprenderá cómo Dido, la reina de Cartago, echó mano de las matemáticas para fundar su grandiosa ciudad-Estado al comprender en qué consisten los problemas isoperimétricos.

Pensará en la mejor manera de acomodar balas de cañón para que ocupen el mínimo espacio estudiando la conjetura de Kepler y calculando las mejores opciones. Después hará un viaje al infinito y comprenderá los distintos infinitos que manejan los matemáticos. Meditará sobre la existencia del infinito en el universo. Más adelante se confrontará con cuestiones paradójicas en matemáticas, averiguará si la tortuga le ganó la carrera a Aquiles y sabrá quién rasura al barbero del pueblo.

Se romperá la cabeza tratando de entender la emoción del señor Portes al enterarse de que la conjetura de Poincaré había sido demostrada. Tratar de comprender qué significa la dichosa conjetura mete en camisa de once varas al duende, quien después de grandes meditaciones logra entender más o menos de qué trata. Esto lo lleva a estudiar un poco de topología. Estudia los orígenes de esta área de las matemáticas y entiende la diferencia entre topología y geometría.

Agasaja su vista con hermosos mosaicos y decoraciones, presentes ya sea en las tumbas egipcias, en las paredes de la Alhambra o en los embaldosados de Praga. Pero más le asombra que haya matemáticas involucradas y que haya teoremas que los expliquen. Finalmente acaba estudiando las construcciones geométricas con regla y compás, y comprendiendo los tres problemas insolubles de la geometría griega.

Concluye cada una de sus aventuras leyendo las biografías de personajes centrales para cada uno de los temas con los que se confronta en sus aventuras, y se asombra de su pasión y de sus contribuciones a las matemáticas.*[1]

Sarando, nuestro duende matemático, no es sólo un cicerone que nos guía en nuestro paseo por el mundo de las matemáticas, sino que trata de representar al lector e intenta ponerse en sus zapatos para ayudarle a entender mejor los temas que se tratan en este libro. Partiendo de que las matemáticas no son una disciplina sencilla de entender, y de que es necesario manejar el idioma en el que están escritas, Sarando se transforma en una especie de intérprete, en un *alter ego* del lector, que le ayuda a entender y también a comprender que no todo se puede entender, aunque se puede apreciar y en cierta medida disfrutar.

[1]* Veinticinco de las 26 biografías presentadas se basan en los textos de J. J. O'Connor y E. F. Robertson, disponibles en http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html (MacTutor History of Mathematics Archive). Sólo la de Bertrand Russell se basa en un artículo de A. D. Irvine (misma página web). En español pueden leerse versiones ampliadas en http://www.matem.unam.mx/cprieto.

Las matemáticas no se leen como una novela. Hay que leer y releer y volver a leer cambiando el orden. El orden de las aventuras no guarda una lógica estricta; es un tanto aleatoria, por lo que el lector no tiene que leerlas en orden. Siempre será conveniente tener papel y lápiz a mano para poder hacer matemáticas y reproducir la idea que se presenta en el texto. De igual modo, la escritura de cada capítulo no es rígida; intenta parecerse a una plática informal sobre matemáticas (Sarando revisa uno y otro libro, sin mayor orden, al colarse a la biblioteca del señor Portes). De repente se cambia de tema, para luego volver al tema central.

Agradezco a Michael Barot por haberme proporcionado la espiral de Ulam y la distribución de los primos y de los primos gemelos que se presenta en la primera aventura, y a Francisco Martín, por su anuencia para usar sus imágenes de las superficies mínimas. Las imágenes de las teselaciones provienen de la Wikipedia.

I. Primera aventura: de primos y gemelos

> La matemática es la reina de las ciencias, la teoría de los números es la reina de las matemáticas.
>
> Carl-Friedrich Gauss (1777-1855)

El cielo tronaba y a lo lejos se apreciaban los relámpagos que amenazaban con una fuerte tormenta aquella noche de verano. Hacía un par de horas que don Joaquín había regresado a casa y estaba sentado frente a su escritorio leyendo con avidez un libro, cuya portada estaba decorada con números dibujados a colores.

2 3 5 7 11 13
17 19 23 29 31 ...

Como ya había ocurrido en otras ocasiones, esta portada intrigó a Sarando, nuestro viejo amigo, el duende del jardín de la casa, quien contaba los minutos para que se apagaran todas las luces y poder colarse de nuevo a la biblioteca a revisar ese libro que tanto interés despertaba en el señor Portes.

Poco antes de la medianoche se fueron oscureciendo las ventanas de la casa. Doña Violeta había atendido a sus perros y finalmente se fue a la cama. La ansiedad de Sarando se desbordaba e, inmediatamente, entró en el estudio y revisó aquel libro. *Los números primos* era su título.

—Vaya —meditó Sarando—, números primos. De ellos no había yo aún escuchado.

Y observó aquellos números que aparecían en la portada del libro: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31...

—¿Qué misterio encierran estos números? —se preguntó intrigado.

Comenzó a meditar sobre ellos y observó que todos eran números impares (o *nones*, como había escuchado a unas niñas decir durante la fiesta de cumpleaños de Adrián), salvo el primero, que era 2. Pero vio que no estaban todos los impares, pues faltaban 9, 15, 21, 25, 27... Gracias a su perspicacia no le costó trabajo percatarse de que los impares que faltaban eran 3 × 3, 3 × 5, 3 × 7, 5 × 5, 3 × 3 × 3..., es decir, eran productos de algunos de los números que sí aparecían. No tardó en darse cuenta también de que los que se enlistaban en la portada del libro eran precisamente aquellos que no podían descomponerse como un producto de números más pequeños. Entonces abrió la primera página del libro.

Los números primos

Los números primos son los átomos de las matemáticas.

—¿En qué quedamos? —pensó Sarando—. ¿Es esto matemáticas, química o física? ¿Átomos?

Son los átomos, pues como la etimología de la palabra lo dice son indivisibles; además son los elementos con que se construyen todos los demás números.

Se dice que un número mayor que 1 es *primo* si sólo puede dividirse entre sí mismo y entre 1, es decir, si no admite ningún otro número que lo divida. Equivalentemente, un número natural es primo si tiene exactamente dos divisores distintos: 1 y él mismo. Resulta que cualquier otro número, como 4, 6, 8, 9 o 10, puede escribirse como producto de primos; además, salvo por el orden, estos primos son únicos para cada número. Por ejemplo, $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 2 \times 2$, $9 = 3 \times 3$, $10 = 2 \times 5$. De hecho, si un número no es primo, entonces se dice que es *compuesto*, es decir, se puede expresar como un producto de números distintos de 1 y de él mismo. Cada uno de estos factores, o ya resulta primo o a su vez puede expresarse como producto de factores más pequeños. Como es imposible expresar a un número entero como un producto infinito de enteros distintos de 1, resulta que debe poder expresarse como un producto de números primos, como en los ejemplos de arriba. De hecho, como ya dijimos, esta descomposición en primos es única para cada número, excepto por el orden de los factores (que no altera el producto).

Por supuesto que Sarando se sintió fascinado, pues había descubierto por sí mismo el concepto de número primo y había entendido por qué estos números son los átomos de las matemáticas.

Una de las primeras preguntas que surgen respecto de la colección de los números primos es si hay un número finito de ellos o, por el contrario, si hay una infinidad.

—Buena pregunta —se dijo Sarando—. Si son sólo un número finito, eso simplificaría mucho la aritmética; facilitaría los cálculos. ¿Pero cómo se podrá averiguar eso?

Sarando se puso a pensar y comenzó a alargar la lista de los números primos que contenía la portada de aquel libro: 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139...

—¡Caramba! Parece que no se acaba esta lista; pero también se vuelve cada vez más difícil de continuar, pues hay que hacer muchas divisiones para ver si salen exactas o no —reflexionaba Sarando.

Tratando de continuarla, el sueño lo venció y cayó dormido sobre la página del libro. Al empezar a clarear la mañana despertó súbitamente y se levantó para salir a esconderse en su cueva antes de que la familia Portes apareciera para desayunar. No obstante alcanzó a leer algo más del libro: "Hay una infinidad de números primos". Salió corriendo, mas alcanzó a discurrir:

—Tenía yo razón, hay una infinidad. Pero, ¿cómo verificar esto?

Durmiendo, ya metido en su cueva bajo el árbol, Sarando tuvo un sueño. En él se vio a sí mismo hablando con un antiguo griego que decía llamarse Euclides. Por supuesto, quien en su sueño se aparecía era el gran matemático del siglo III antes de nuestra era. El sabio le preguntó a Sarando qué le preocupaba, y Sarando le respondió:

—Son los números primos; quiero saber por qué hay una infinidad de ellos —le respondió el duende, y Euclides le dijo:

—Pues esto es muy sencillo de verificar. Si fueran sólo un número finito, entonces podría tomarse el producto de todos ellos y a este producto sumarle 1. Ahora es muy sencillo ver que si tomamos cualquiera de los primos, ninguno de ellos dividirá al resultado. Esto significaría que ningún número, salvo 1 y él mismo, lo dividirá, por lo que el resultado tendría que ser un número primo, obviamente, mayor que todos los que se habían tomado, lo cual es una contradicción, pues supuestamente ya habíamos tomado a todos los números primos.

—¡Vaya! —meditó Sarando en sueños—, una contradicción.

Y continuó el resto del día durmiendo. Al caer la tarde despertó y recordó vagamente su sueño. No había olvidado, sin embargo, la pregunta con la que se había escapado de la biblioteca temprano esa mañana. Más o menos intuía cómo estaba la prueba: si la colección de números primos es finita, se toma el producto de todos y se le suma 1; con ello construimos un nuevo número que no puede ser divisible más que entre 1 y entre sí mismo, por lo que debe ser primo. Esto contradice la hipótesis de que ya habíamos tomado todos los primos. Luego, la suposición de que hay un número finito de primos debe ser falsa. Con esto en su cabeza, esperó ansiosamente volver a entrar a la biblioteca para continuar su lectura de la noche anterior. Entrada la noche, al oscurecerse la casa, penetró y, hojeando el libro de la velada pasada, encontró la prueba del teorema.

¿Cuántos números primos hay?

Teorema. Hay una infinidad de números primos.

Demostración. Supongamos que el teorema fuese falso y, por lo tanto, que sólo tenemos un número finito de ellos (tal vez muchísimos). Denotémoslos por $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ahora consideremos el número

$$k = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1,$$

que es mayor que todos los primos que tomamos y, por tanto, debe ser compuesto. Si ahora tomamos cualquiera de los números primos, digamos p_i, donde i es alguno de los índices entre 1 y n, y dividimos k entre p_i, nos queda siempre un residuo de 1, es decir, k no es divisible entre ninguno de los primos más pequeños y, por tanto, debe ser primo. Esto es absurdo, pues ya habíamos tomado a todos los primos.

Esta demostración, probablemente debida a Euclides, es uno de los primeros ejemplos que hubo de una demostración *por reducción al absurdo*.

—¡Mira nada más! —consideró Sarando, que empezaba a recordar su sueño—, éste es el señor que vi en mi sueño diciéndome precisamente la prueba que acabo de leer —y continuó leyendo.

Es posible reformular esta prueba, para hacerla directa y no indirecta, como arriba, construyendo, al menos teóricamente, una infinidad de primos. Supongamos que ya hemos encontrado n primos, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, y consideremos el número $k = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$. Tenemos que como ninguno de los primos que ya tenemos divide a k, entonces, una de dos, o k es primo o hay un primo distinto de los que ya teníamos que sí lo divide. Así, cada vez que tengamos una colección finita de primos debe haber uno más que no está en ella. Esto sólo puede ocurrir siendo infinita la colección de todos los primos.

Sarando había visto nuevamente cómo era una demostración en matemáticas y no podía más que estar fascinado, pues veía en ella una gran frescura. Entendía perfectamente que las verdades matemáticas eran eternas y, con ello, modernas, aunque tuvieran más de 20 siglos de haber sido probadas. Las matemáticas no envejecen y sus verdades son hoy por hoy tan vigentes como lo han sido siempre. Esto no ocurre en otras ciencias, en que las teorías sobre los fenómenos dejan de ser satisfactorias, a veces, muy pronto. Al longevo duende le encantaba la idea de haber encontrado un conocimiento a su medida: un conocimiento eterno.

Números primos grandes

Si observamos la lista de números primos nos encontramos con 3, 7, 31, 127, etc. Todos éstos son de la forma $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^5 - 1$, $2^7 - 1$. Esto no significa que, en general, $2^n - 1$ sea primo. Hasta la Edad Media se suponía que si n es primo, entonces $2^n - 1$ es primo. Esto tampoco es cierto; por ejemplo, $2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \times 89$. Sin embargo, es frecuente encontrar primos de esta forma. A este tipo de números primos se les conoce como *primos de Mersenne*. Llaman la atención los números primos más grandes que se conocen desde septiembre de 2008. Éstos son de Mersenne; a saber, se trata de

$$p = 2^{37\,156\,667} - 1,$$

es decir, dos elevado a treinta y siete millones ciento cincuenta y seis mil seiscientos sesenta y siete menos uno. Éste es un número con más de 11 millones de cifras. Hay uno aún más grande que el anterior, pero de la misma forma, se trata de

$$q = 2^{43\,112\,609} - 1,$$

es decir, dos elevado a cuarenta y tres millones ciento doce mil seiscientos nueve menos uno. Éste es un número con casi 13 millones de cifras. Por supuesto, los exponentes 37 156 667 y 43 112 609 son también números primos.[1]

Sarando se quedó asombrado. Trató de pensar en el número más grande en el que hubiera pensado alguna vez. Recordó que el universo había apareci-

[1] Véase http://www.primzahlen.de.

do a partir de una gran explosión que tuvo lugar hace aproximadamente 13 750 millones de años. No le costó demasiado trabajo calcular que este lapso corresponde a 433 917"000 000'000 000 segundos (más de 430 000 billones de segundos), que es *apenas* un número con 18 cifras.

—Realmente estos matemáticos tienen mucha imaginación —caviló Sarando—. Mira que "inventar" números con casi 13 millones de cifras. Esos números seguramente no son concebibles ni como "cifras astronómicas".

Finalmente, salió de la biblioteca y se fue a dormir. Mientras intentaba conciliar el sueño, le daban vuelta alrededor de la cabeza números gigantescos. Se preguntaba cuáles de ellos serían primos y, de ser así, si darían origen a primos de Mersenne. Finalmente logró dormir. Ya estando en sueños, apareció un profesor de aspecto taciturno y cabello cano que dice: "Los números de la forma $2^p - 1$ no son primos, si p no es primo. La prueba es muy sencilla —seguía diciendo y escribiendo en el pizarrón—; supongan ustedes que $p = mn$, donde m y n son números naturales diferentes de 1. Entonces es muy fácil verificar la siguiente identidad

$$2^p - 1 = (2^m - 1)(2^{m(n-1)} + 2^{m(n-2)} + 2^{m(n-3)} + \ldots + 2^m + 1)\text{''}.$$

En medio de su sueño, Sarando extrajo papel y lápiz y, siguiendo la propuesta del viejo profesor, calculó, multiplicando primero 2^m por todo el chorizo del lado derecho, y luego restando el producto de 1 por el mismo chorizo:

$$\begin{aligned}(2^{mn} + 2^{m(n-1)} + 2^{m(n-2)} + \ldots + 2^m) - (2^{m(n-1)} + 2^{m(n-2)} + \ldots + 2^m + 1) =\\ = 2^{mn} - 1 = 2^p - 1.\end{aligned}$$

Se quedó asombrado de la precisión de sus cálculos, para los cuales aplicó la ley de los exponentes, que asegura que $2^a 2^b = 2^{a+b}$. Pasó el resto de la noche con una sensación de placidez, que en la mañana lo hacía sentir descansado y ávido por aprender más. Fue grande su asombro, pues al despertar, ahí estaba la hoja de papel y su demostración de que si p no es primo, entonces tampoco lo es $2^p - 1$.

No hay una receta para producir uno a uno los números primos; para verificar que lo son hay que probar dividirlos entre todos los números (primos) más pequeños que ellos. De hecho, si un número n es producto de otros dos números k y l, entonces claramente uno de los dos debe ser menor que o igual a la raíz cuadrada de n, mientras que el otro tendrá que ser mayor o igual a dicha raíz.

Esto significa que si deseamos averiguar si un número es primo, basta probar su divisibilidad entre los números primos menores o iguales a su raíz cuadrada. Por ejemplo, si $n = 9991$ y queremos saber si es primo, ya que $\sqrt{9991}$ es un poquito menor que 100, basta ver si es divisible entre los primos menores que 100. Vemos que no lo es más que entre 97 (y el resultado de la división es 103, que también es primo); así $9991 = 97 \times 103$, y por tanto no es primo.

De hecho se tiene:

Teorema. Un número es primo si y sólo si no es divisible entre ningún primo menor que o igual a su raíz cuadrada.

Eratóstenes diseñó un método para buscar primos; a saber, se elabora una lista ordenada de todos los números desde 1 hasta N.

Primero se tachan a partir del 4 todos los pares (de 2 en 2); luego a partir de 6 los múltiplos de 3 (de 3 en 3), a partir de 10 los múltiplos de 5 (de 5 en 5), etc. De acuerdo con el teorema de arriba, basta con tachar hasta los múltiplos del primo más grande que es menor o igual a la raíz cuadrada de N. Los que no se tachan en este proceso —es decir, los que no se atoran en la criba (o coladera)— son los números primos menores o iguales a N. A éste se le conoce como *método de la criba de Eratóstenes*.

En una tabla se ve así:

Números naturales	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Criba de 2:	2	3	–	5	–	7	–	9	–	11	–	13	–	15	–	17	–	19	–	21	–
Criba de 3:	2	3	–	5	–	7	–	–	–	11	–	13	–	–	–	17	–	19	–	–	–
Criba de 5:	2	3	–	5	–	7	–	–	–	11	–	13	–	–	–	17	–	19	–	–	–

Sarando se quedó muy contento de conocer un par de métodos seguros para encontrar números primos.

—Eso de echarlos en una coladera y sólo los que no pasan son primos suena muy conveniente —consideró.

Le quedaba claro, no obstante, que el proceso es laborioso. Decidió regresar a su cueva y continuar la noche siguiente su excursión al mundo de los números primos. Esa noche sus sueños lo llevaron a pasear por un bosque donde cada árbol era un número natural. Se detenía ante cada uno, preguntándose si el número del árbol era primo o no. Lo acompañaba el viejo profesor, que había cambiado su tiza por una varita mágica en forma de brocha. Cada vez que Sarando verificaba que el número de algún árbol era primo, el profesor hacía un movimiento con la varita y el árbol se volvía rojo. Así, había árboles verdes y rojos en aquel bosque. Al despertar, Sarando aún se sentía rodeado de árboles. Pero pensando en los primos, se preguntó si había una regla que dijera cómo estaban acomodados los árboles rojos entre los verdes, es decir, los primos entre los naturales. Llegada la noche, en el mismo libro que había estado leyendo, encontró la siguiente tabla:

N	Número de primos menores que *N*
1 000	168
1 000 000	78 498
1 000 000 000	50 847 534
1 000 000 000 000	37 607 912 018
1 000 000 000 000 000	29 844 570 422 669
1 000 000 000 000 000 000	24 739 954 287 740 860

En otras palabras, entre los primeros 1000 números naturales, 16.8% son primos; entre el primer millón, son 7.85%; entre el primer millardo, sólo son 5.08%; mientras que entre el primer billón sólo son 3.76%; en el primer billardo son 2.98%, y en un trillón son 2.47%. Los matemáticos especialistas en la teoría de los números ya tienen una fórmula para calcular esta distribución; es conocido como *teorema de los números primos*, que asegura que el número de primos menores que N, denotado por $\Pi(N)$, cumple

$$\Pi(N) \sim N / \ln N,$$

donde $\ln N$ es el llamado *logaritmo natural*, o logaritmo de base e (donde e es el número de Euler) de N. Es decir, $\Pi(N)$ es *aproximadamente* N dividido entre el logaritmo natural $\ln N$ de N.

Si bien Sarando entendía la fórmula, no supo bien a bien cómo interpretarla para entender cómo estaban distribuidos los árboles rojos en su bosque. Continuó, curioso, su lectura.

La geometría de los números primos

Un físico y matemático polaco, Stanisław Ulam, alguna vez tuvo la ocurrencia de poner todos los números naturales sobre una espiral cuadrada, donde los números primos se escriben en rojo, como se aprecia en la figura I.1.

Observó que hay ciertas diagonales en las cuales se concentran más los primos. La figura I.2 concentra varios miles de números en la espiral de Ulam, que sólo se ven como pequeños puntos de colores. Los puntos rojos marcan los primos.

Sarando se asombró de ver que en la distribución de los números primos aparentemente sí hay geometría. Se preguntó si hay alguna manera de formalizar esta situación geométrica de los números primos. Finalmente se quedó dormido y, para su asombro, en sus sueños comenzó a volar en un globo de Cantoya. Desde ahí veía su bosque de la noche anterior, que más bien era un huerto, con todos los árboles acomodados en forma de una espiral cuadrada. Como en su sueño ya era otoño, la estación favorita

```
37 — 36 — 35 — 34 — 33 — 32 — 31
|                             |
38   17 — 16 — 15 — 14 — 13   30
|    |                   |    |
39   18   5 — 4 — 3      12   29
|    |    |       |      |    |
40   19   6   1 — 2      11   28
|    |    |              |    |
41   20   7 — 8 — 9 — 10      27
|    |                        |
42   21 — 22 — 23 — 24 — 25 — 26
|
43 — 44 — 45 — 46 — 47 — 48 — 49…
```

Figura I.1.

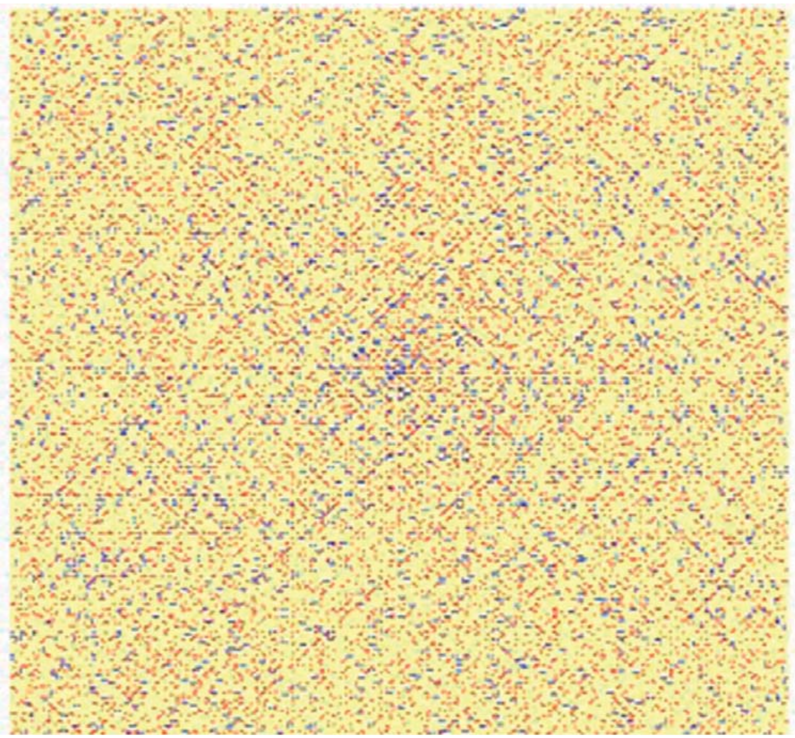


Figura I.2.